DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA
CENTRO: FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES Y TURISMO DE ORENSE.

ESTADÍSTICA- 2º CUATRIMESTRE 2007/08

3-5

Boletín de problemas 1. Distribución en el muestreo y Estimación Puntual

1.- Resuelve:

a) Sea $\{X_1,\dots,X_5\}$ una m.a.s. de una distribución $N(0,3)$. Calcular:

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} X_i^2}{X_5^2} \geq 900\right)$$

b) Sea una población $X \in N(0,2)$. Utilizando una m.a.s., de tamaño 25, calcule: $P(\overline{X} > 1, S^2 < 1.8093)$, donde S^2 denota la cuasivarianza muestral.

2.- Determinar los siguientes valores:

a) El 0.95 cuantil de la distribución χ^2_6 y $P(3 \leq \chi^2_6 \leq 9)$.

b) Si X sigue una distribución t_8 determinar, $P(|X| \leq 1)$ así como el valor que verifica $P(|t_6| > x) = 0.05$.

c) El 0.05 cuantil de la distribución $F_{10,12}$.

3.- Calcular los siguientes valores:

a) Si X sigue una distribución χ^2_{22}, $P(X \notin (13,37))$ así como el valor $\chi^2_{22,}$[illegible]

b) Si X sigue una distribución t_{18} determinar, $P(X \notin (1,2))$

c) Si X sigue una distribución $F_{4,5}$ determinar, $P(X > 11.4)$, así como el valor $F_{11,5,0.01}$.

4.- a) Dada una m.a.s. de tamaño 100 de una distribución N(μ,2), calcular la probabilidad de que la media muestral y la poblacional difieran más de 0.5.
¿De qué tamaño habría que seleccionar la muestra para poder afirmar, con probabilidad 0.9, que la media muestral diferirá de la poblacional en menos de 0.1?.
b) Se selecciona una muestra aleatoria simple de 9 unidades de una distribución Normal(23,6). Si S^2 es la cuasivarianza muestral, encontrar el valor de k tal que $P(S^2 > k) = 0.95$.

5. Sea $X_1,\dots,X_n$ una m.a.s. de una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x) = \frac{\theta}{3^\theta} x^{\theta-1} \quad si\ 0 < x < 3$$

a) Estimar el parámetro θ por máxima verosimilitud.

b) Buscar un estimador para θ por el método de los momentos.

6. Se supone que el precio de los productos vendidos en una tienda en decenas de miles de euros es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0$$

a) Obtener el estimador máximo verosímil del parámetro α.

b) Obtener el estimador del parámetro α por el método de los momentos.

c) Si en una muestra aleatoria simple de 5 artículos, los precios en euros fueron [illegible]000, 7000, 5000, 8000 y 9000, obtener una estimación puntual del parámetro α.

7. Dada la función de densidad $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$. Determinar el estimador máximo verosimil del parámetro λ (λ>0) a partir de una muestra aleatoria de tamaño n. Con la siguiente muestra de tamaño 10, calcular una estimación máximo verosímil del parámetro λ: 1.77, 1.98, 2.50, 1.15, 2.93, 4.44, 1.98, 1.47, 1.53, 5.24

8. La duración sin fallos de un cierto componente electrónico sigue una distribución exponencial. Es decir su función de densidad es

$$f(x)=\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}}\ si\ x>0 \qquad \text{con } \alpha>0$$

Obtener el estimador máximo verosímil de la duración media sin fallos de dicho componente.

9.- El error de medida de transmisión de una señal sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$. Sea $\{X_1, X_2, X_3\}$ una m.a.s. de tamaño 3 y dos estimadores de la media poblacional

$$U_1(X_1,X_2,X_3)=\frac{X_1+2X_2+3X_3}{6};\quad U_2(X_1,X_2,X_3)=\frac{X_1-4X_3}{-3}$$

a) ¿Cuáles son insesgados?.
b) ¿Cuál es más eficiente?.
c) Dar un estimador, insesgado, más eficiente para la media poblacional.

10. Sea X una v.a. discreta con función de probabilidad

$$P(X=x)=\frac{(\theta-1)^{1-x}}{\theta} \quad \text{para x = 0, 1 y } \theta>0.$$

a) Calcula un estimador de θ utilizando el método de los momentos.
b) Calcula el estimador de máxima verosimilitud de θ.
c) Dar una estimación de θ teniendo en cuenta la siguiente muestra: 0, [illegible] 1, 0, 1, 1, 1.

11. Sea X una v.a. discreta que toma los valores 0, 1, 2, 3 con probabilidad θ, 2.5θ, $1-4\theta$, $\theta/2$ respectivamente y $\theta<1/4$. Se considera el estadístico $T(X_1,X_2,\dots,X_n)=\frac{2-\overline{X}}{4}$, con $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. Calcular el sesgo, la varianza y el Error Cuadrático Medio del estimador con respecto al parámetro θ.

12. Se sabe que el sesgo del estimador $\hat{\theta}$ del parámetro θ vale $\frac{3}{4}\theta$. Proponga un nuevo estimador en función de $\hat{\theta}$ que resulte insesgado.

13. Se toman 10 precios de un determinado producto de cosmética en 10 establecimientos distintos, para estudiar su precio en el mercado. Los precios obtenidos han sido: 10,15,13,17,18,15,15,17,15,15, . Estime la media, la varianza y la desviación típica de la distribución del precio en el mercado de dicho producto

14. (Examen de junio 2007) Se estudia la variable "Nivel de Renta de las familias españolas". Nos interesa el valor de la mediana de la variable que denotaremos por θ. Se han considerado dos estimadores de ese parámetro a partir de una muestra de tamaño n, $\hat{\theta}_1(X_1,\dots,X_n)$ y $\hat{\theta}_2(X_1,\dots,X_n)$ verificando que:

$$E\left[\hat{\theta}_1(X_1,\dots,X_n)\right]=\left(\frac{n-0.3}{n}\right)\theta \quad y \quad E\left[\left(\hat{\theta}_2(X_1,\dots,X_n)\right)\right]=\left(\frac{n+0.3}{n}\right)\theta$$

$$Var\left[\hat{\theta}_1(X_1,\dots,X_n)\right]=\frac{1}{\sqrt{5n}}\sqrt{\theta} \quad y \quad Var\left[\hat{\theta}_2(X_1,\dots,X_n)\right]=\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\theta}$$

¿Cuál de los dos estimadores es mejor en cuanta a sesgo, varianza y Error Cuadrático Medio? ¿Es alguno de los estimadores asintóticamente insesgado?

Resultados **Boletín 1. Distribución en el muestreo y Estimación Puntual**

1. a) $p=0.05$ b) $p=6.21*10^{-5}$
2. a) $c=12.59$ y $p=0.635$ b) $p=0.653$ y $x=2.447$ c) $c=0.3436$
3. a) $p=0.0905$ y $c=12.34$ b) $p=0.865$ c) $p=0.01$ y $c=0.18$
4. a) $p=0.0124$ y $n\geq 1083$ b) $k=12.285$
5. $\hat{\theta}_{MV}=\left(\ln(3)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right)^{-1}$ $\qquad \hat{\theta}_{MOM}=\frac{\overline{X}}{3-\overline{X}}$
6. $\hat{\alpha}_{MV}=\frac{-n}{\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)}$ $\qquad \hat{\alpha}_{MOM}=\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$
7. $\hat{\lambda}_{MV}=1/\overline{X}$ $\qquad 4.0016\cdot 10^{-2}$
8. $\hat{\alpha}_{MV}=\overline{X}$

(5) Sea $X_1,\dots,X_n$ una m.a.s de una variable X con función de densidad:

$$f(x) = \frac{\theta}{3^\theta} x^{\theta-1} \quad \text{si} \quad 0<x<3$$

a) Estimar el parametro θ por máxima verosimilitud.

M.V.: $L(X_1,\dots,X_n;\theta) = \left(\frac{\theta}{3^\theta}x_1^{\theta-1}\right)\left(\frac{\theta}{3^\theta}x_2^{\theta-1}\right)\cdots\left(\frac{\theta}{3^\theta}x_n^{\theta-1}\right) = \frac{\theta.\theta\dots\theta}{3^\theta.3^\theta\dots3^\theta}\left(x_1^{\theta-1}.x_2^{\theta-1}\dots x_n^{\theta-1}\right) =$

$$= \frac{\theta^n}{3^{n\theta}}\left(\prod x_i\right)^{\theta-1}$$

Como la derivada de $\frac{\theta^n}{3^{n\theta}}(\prod x_i)^{\theta-1}$ es muy complicada la "suavizamos" aplicando ln

$\boxed{\text{Aplicamos ln:}}$

$$\ln L(X_1,\dots,X_n;\theta) = \ln \frac{\theta^n}{3^{n\theta}}(\prod x_i)^{\theta-1} =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ln A.B = \ln A + \ln B \\ \ln A/B = \ln A - \ln B \\ \ln A^n = n \ln A \end{array}}$$

$$= \ln\theta^n - \ln 3^{n\theta} + \ln(\prod x_i)^{\theta-1} = (n)\ln(\theta) - (n\theta)\ln(3) + (\theta-1)\ln(\prod x_i) =$$

$$= n\ln\theta - n\theta\ln 3 + (\theta-1)\ln(\prod x_i)$$

Derivamos parcialmente respecto a θ:

$$n\ln\theta - n\theta\ln 3 + (\theta-1)\ln(\prod x_i) =$$

$$= \underline{n.\frac{1}{\theta}} - \underline{n1\ln 3} + \underline{1.\ln(\prod x_i)} =$$

$n\ln\theta$
Regla
$y = \ln(x^2+1)$
$y' = \frac{2x}{x^2+1}$
$n\frac{1}{\theta}$

$n\theta\ln 3$
Regla
$y = nx^m$
$y' = n.m.x^{(m-1)}$
$n.1.\ln 3$

$(\theta-1)\ln(\prod x_i)$
Regla
$y = nx^m$
$y' = n.m.x^{m-1}$
$1.\theta^0.\ln(\prod x_i)$

$$= \frac{n}{\theta} - n.\ln 3 + \ln(\prod x_i)$$

igualamos la derivada a cero y despejamos θ

$$\frac{n}{\theta} - n.\ln 3 + \ln(\Pi x_i) = 0$$

$$n - \theta.n.\ln 3 + \theta \ln(\Pi x_i) = 0$$

$$-\theta.n.\ln 3 + \theta.\ln(\Pi x_i) = -n$$

$$\theta.n.\ln 3 - \theta.\ln(\Pi x_i) = n$$

$$\theta(n\ln 3 - \ln(\Pi x_i)) = n$$

$$\theta = \frac{n}{n.\ln 3 - \ln(\Pi x_i)} \Rightarrow \hat{\theta}_{M.V.} = \frac{n}{n.\ln 3 - \ln(\Pi x_i)}$$

Le ponemos el $\hat{}_{M.V}$ a la incognita despejada

Confirmamos que es un máximo

Calculamos la segunda derivada

$$\frac{n}{\theta} - n.\ln 3 + \ln(\Pi x_i)$$

la segunda derivada se calcula con la regla:

$$\frac{\partial^2 F(x;y)}{\partial x^2}.$$

$$y = \frac{n}{\theta} - n.\ln 3 + \ln(\Pi x_i)$$

$\frac{n}{\theta}$

Regla

$$y = \frac{u}{v}$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v_2}$$

$$\frac{0.\theta - n.1}{\theta^2}$$

$n.\ln 3$

Regla

No esta nuestra variable $= 0$

0

$\ln(\Pi x_i)$

Regla

No esta nuestra variable $= 0$

0

$$y' = \frac{0.\theta - n.1}{\theta^2} - 0 + 0 = \boxed{\frac{-n}{\theta^2} < 0}$$

Nota: n es positivo (es un numero natural), θ^2 es positivo al estar elevado al cuadrado con un signo $-$ es < 0

Metodo de los momentos

$$\boxed{E(x) = \bar{X}}$$

$$\boxed{E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx}$$

E(x)

$$f(x) = \frac{\theta}{3^\theta} x^{\theta-1} \quad \text{si} \quad 0 < x < 3$$

$$E(x) = \int_0^3 x \cdot \frac{\theta}{3^\theta} x^{\theta-1}\,dx = \frac{\theta}{3^\theta}\int_0^3 x^1 \cdot x^{\theta-1}\,dx = \frac{\theta}{3^\theta}\int_0^3 x^\theta\,dx = \frac{\theta}{3^\theta}\left[\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1}\right]_0^3 =$$

$$\boxed{\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

$$= \frac{\theta}{3^\theta}\left[\frac{3^{\theta+1}}{\theta+1} - \frac{0^{\theta+1}}{\theta+1}\right] = \frac{\theta}{3^\theta}\left[\frac{3^{\theta+1}}{\theta+1}\right] = \frac{\theta}{3^\theta}\,\frac{3^{\theta+1}}{\theta+1} = \frac{\theta \cdot \boxed{3^\theta} \cdot 3}{\boxed{3^\theta} \cdot (\theta+1)} = \frac{\theta \cdot 3}{\theta+1}$$

$$\boxed{0^n = 0}$$

$$E(x) = \frac{\theta \cdot 3}{\theta+1}$$

Igualamos a $\bar{x}$ y despejamos θ

$$\frac{\theta \cdot 3}{\theta+1} = \bar{x} \Rightarrow \frac{3\theta}{\theta+1} = \bar{x} \Rightarrow 3\theta = \bar{x}(\theta+1) \Rightarrow 3\theta = \bar{x}\theta + \bar{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\theta - \bar{x}\theta = \bar{x} \Rightarrow \theta(3-\bar{x}) = \bar{x} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\bar{x}}{3-\bar{x}}}$$

$$\hat{\theta}_{MM} = \frac{\bar{x}}{3-\bar{x}}$$

6 Se supone que el precio de los productos vendidos en una tienda en decenas de miles de euros es una variable aleatoria con función de densidad: (26)

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad 0<x<1 \qquad \alpha>0$$

a) Obtener el estimador maximo verosimil del parámetro α

• Función de verosimilitud

$$L(x_1,\dots,x_n;\alpha) = \alpha x_1^{\alpha-1} \cdot \alpha x_2^{\alpha-1} \cdots \alpha x_n^{\alpha-1} = \alpha^n (\Pi x_i)^{\alpha-1}$$

• Aplicamos ln

$$\ln(\alpha^n(\Pi x_i)^{\alpha-1}) =$$

$$\ln(\alpha^n) + \ln(\Pi x_i)^{\alpha-1} =$$

$$= n \cdot \ln(\alpha) + (\alpha-1)\cdot\ln(\Pi x_i) =$$

• Derivamos parcialmente respecto a α:

$$y = n \cdot \ln(\alpha) + (\alpha-1)\cdot\ln(\Pi x_i)$$

$\cancel{y'}$

$$n \cdot \ln(\alpha) \qquad (\alpha-1)\ln(\Pi x_i)$$

$$n \cdot \frac{1}{\alpha} \qquad (1-0)\ln(\Pi x_i)$$

$$y' = \frac{n}{\alpha} + \ln(\Pi x_i)$$

• Igualamos la derivada a cero y despejamos α

$$\frac{n}{\alpha} + \ln(\Pi x_i) = 0$$

$$n + \alpha(\ln(\Pi x_i)) = 0$$

$$\alpha(\ln(\Pi x_i)) = -n$$

$$\alpha = \frac{-n}{\ln(\Pi x_i)} \Rightarrow \hat{\alpha}_{mv} = \frac{-n}{\ln(\Pi x_i)}$$

- Confirmamos que es un maximo

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1,\dots,x_n;\alpha)}{\partial \alpha^2} = \frac{0\cdot\alpha - 1\cdot n}{\alpha^2} + 0 = -\frac{n}{\alpha^2} < 0$$

n es neutral (por lo tanto positivo

α^2 es positivo por estar elevado al cuadrado

$$-\frac{+}{+} < 0$$

$$\boxed{E(x) = \bar{X}} \qquad \boxed{E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx}$$

$$E(x) = \int_0^1 x \cdot \alpha x^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \alpha \cdot x^{\alpha} dx = \alpha \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 =$$

$$= \alpha \left[\frac{1^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{0^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$

igualamos a $\bar{x}$ y despejamos α

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} = \bar{X} \Rightarrow \alpha = \bar{X}(\alpha+1) \Rightarrow \alpha = \alpha\bar{X} + \bar{X} \Rightarrow \alpha - \alpha\bar{X} = \bar{X} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(1-\bar{x}) = \bar{x} \Rightarrow \alpha = \frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}$$

$$\boxed{\hat{\alpha}_{MM} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}}$$

⑦ Dada la función de densidad $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$ Determinar el estimador maximo verosimil del parametro λ ($\lambda>0$) a partir de una muestra aleatoria de tamaño n. Con la siguiente muestra de tamaño 10, calcular una estimación maximo verosimil del parametro λ:

1.77, 1.98, 2.50, 1.15, 2.93, 4.44, 1.98, 1.47, 1.53, 5.24

$$f(x)=\begin{cases}\lambda . e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leq 0\end{cases}$$

Función de verosimilitud

$$L(x_1,\ldots,x_n:\lambda)=\lambda.e^{-\lambda x_1}.\lambda.e^{-\lambda.x_2}\ldots\lambda.e^{-\lambda.x_n}=\lambda^n.e^{(-\lambda x_1+-\lambda x_2+\ldots+-\lambda x_n)}=$$

$$=\lambda^n.e^{-\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n)}=\lambda^n.e^{-\lambda\sum x_i}$$

Aplicamos ln

$$\ln L(x_1,x_2,\ldots x_n:\lambda)=\ln\lambda^n.e^{-\lambda\sum x_i}\underset{\boxed{\ln a.b = \ln a+\ln b}}{=}\ln\lambda^n+\ln e^{-\lambda\sum x_i}\underset{\boxed{\ln a^b = b.\ln a}}{=}n\ln\lambda-\lambda.\sum_{i=1}^{n}x_i.\ln e=$$

$$\underset{\boxed{\ln e = 1}}{=}n.\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i.1$$

Derivamos parcialmente respecto a λ:

$$\frac{\partial\ln L(x_1,\ldots x_n;\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\partial\left(n.\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i.1\right)}{\partial\lambda}\underset{\boxed{y=\ln f(x) \quad y'=\frac{f'(x)}{f(x)}}}{=}n.\frac{1}{\lambda}-\sum x_i=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i$$

Igualamos a cero y despejamos λ:

$$\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$n-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

$$-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i=-n$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i=n$$

$$\lambda=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{n/n}{\boxed{\sum_{i=1}^{n}x_i/n}}\underset{\text{igual}}{=}\frac{1}{\boxed{\bar{X}}}$$

Confirmamos que es un maximo

$$\frac{\partial^2\ln L(x_1,\ldots,x_n.\lambda)}{\partial\lambda^2}\underset{\boxed{y=\frac{u}{v} \quad y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}}}{=}\frac{0.\lambda-n.1}{\lambda^2}-0=-\frac{n}{\lambda^2}<0$$

$$-\frac{+}{+}<0$$