

ESTADÍSTICA

CURSO 2007/2008

Boletín 2. Inferencia Estadística: Intervalos de confianza

1. (Septiembre, 2000) Se lleva a cabo una investigación sobre los rendimientos que produce un determinado producto financiero ofertado por los bancos, y para ello se selecciona una muestra aleatoria simple de 9 entidades bancarias, suponiendo que los rendimientos de este producto, en el conjunto monetario se distribuyen normalmente, que la media y la desviación típica poblacionales fueran desconocidas y sabiendo que la media muestral es 21 unidades monetarias (u.m.) y la desviación típica de la muestra 4,5 u.m., obtener un intervalo de confianza al 95% de la media poblacional. ¿Pertenece el valor 35 al intervalo de confianza de la varianza poblacional con un nivel de confianza del 95%?

2. (Septiembre, 1998) Una empresa multinacional está realizando un estudio sobre la satisfacción de sus empleados en el trabajo, en los distintos países en los que tiene delegaciones. Si no se dispone de ninguna información de la proporción de empleados satisfechos en España, ¿qué tamaño muestral tendría que seleccionar para que la longitud del intervalo de confianza al 95% para dicha proporción tenga una longitud inferior a 0,04?

3. Determinar un intervalo de confianza del 95% para la media de una distribución normal con varianza 9 usando una muestra de 100 valores con media 5. ¿Qué intervalos obtendríamos si $n=10$? ¿Y si $n=1000$? Calcular el tamaño de la muestra que se debería coger si deseamos obtener un intervalo al nivel 0'99 y de longitud 0'2.

4. Se está considerando un nuevo sistema de lanzamiento de cohetes para el despliegue de misiles de corto alcance. El sistema actual tiene una probabilidad 0'8 de tener éxito en el lanzamiento. Se obtiene una muestra de 60 lanzamientos con el nuevo sistema y 54 de ellos tienen éxito.

- Calcular un intervalo de confianza del 95% para p .
- Con este nivel de confianza, ¿cuál es el error que cometemos al estimar p por su estimador puntual?

5. Dos muestras de dos poblaciones normales han dado los siguientes resultados:

$$n_1 = 8, \quad \sum_{i=1}^8 x_i = 12, \quad \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 46,$$

$$n_2 = 11, \quad \sum_{i=1}^{11} y_i = 22, \quad \sum_{i=1}^{11} y_i^2 = 80,$$

Obtener un intervalo de confianza para el cociente de varianzas poblacionales al 95%.

6. A mediados de la década de 1930, el cisne trompetero estaba en peligro de extinción en Norteamérica. En esta época, se designaron como refugio el Yellowstone Park y un área adyacente de fuentes termales en Red Rock Lakes, Montana. A finales de los años 60 se efectuó un estudio de los cisnes del área. Se capturaron y marcaron 50 cisnes. Una segunda muestra de 30 cisnes contenía 5 que habían sido marcados. Basándose en esta información:

- Obtener una estimación puntual del número total de cisnes (N) en la región en esas fechas.
- Obtener una estimación por intervalo de confianza al 95% del valor de N .

7. Una compañía contrata 10 tubos con filamentos de tipo A y 10 con filamentos tipo B. Las duraciones de vida observadas han sido:

A: 1.614, 1.094, 1.293, 1.643, 1.466, 1.270, 1.340, 1.380, 1.028, 1.497
B: 1.383, 1.138, 1.092, 1.143, 1.017, 1.061, 1.627, 1.021, 1.711, 1.065

Suponiendo que las varianzas son iguales, encontrar un intervalo de confianza para la diferencia de medias al 90%.

8. En la oficina de control de pesas y medidas se presentó una denuncia de que las botellas de "un litro" de cierta marca de leche no tenían la capacidad real de un litro. Los expendedores se defendieron alegando que era muy difícil que una botella en particular tuviera la capacidad de un litro, pero que la media de la población sí era un litro. Para atender la denuncia, se midieron 25 botellas elegidas al azar y se obtuvo una media muestral de $\bar{x} = 995 \text{ cm}^3$. Supuesto que la capacidad de las botellas es normal con desviación típica $\sigma = 10 \text{ cm}^3$, obtener una estimación por intervalo de confianza al 99% para la capacidad media. ¿Cuál es el número mínimo de botellas que deberían haberse medido para, con un valor de la media muestral $\bar{x} = 995 \text{ cm}^3$ y con una confianza del 99%, poder afirmar que el denunciante tenía razón?

9. Se comparan las producciones de dos máquinas A y B que fabrican elementos en serie. En una muestra de 200 elementos de A resultaron 16 defectuosos, mientras que en otra de 100 elementos de B resultaron 12 defectuosos. Calcular un intervalo de confianza para la diferencia de proporciones de defectuosos en ambas máquinas con $\alpha = 0.05$.

10. Se desea estimar la diferencia entre los contenidos medios de alquitrán de dos marcas de cigarrillos con un error menor que 0.1 mg con probabilidad aproximadamente igual a 0.95. Si los contenidos de alquitrán de ambas marcas de cigarrillos son variables aleatorias normales independientes con desviación típica igual a 1, ¿cuántos cigarrillos de cada marca habría que utilizar? (Supóngase que ambas muestras son del mismo tamaño).

11. (2004) De una determinada partida de cajas de un determinado producto de consumo, sólo se sabe que su peso se distribuye según una ley normal de varianza 9 grs^2 . Elegidas al azar 8 de estas cajas se obtuvieron los siguientes pesos en gramos:
125, 124.5, 127, 126.5, 123, 120, 124, 127.5

- Determinar un intervalo de confianza para el peso medio de dicha partida de cajas. Nivel de confianza del 95%.
- ¿Cuál sería el tamaño muestral necesario para que la estimación del peso medio difiera del peso medio real en menos de una unidad, con probabilidad de al menos 0.99?

12.- Con el fin de racionalizar su uso se quiere calcular la diferencia de utilización de dos fax de una empresa. Para ello se controló el tiempo de utilización de cada fax durante una serie de días elegidos al azar, obteniéndose los siguientes resultados:

Fax 1	2,4	3,1	2,5	2,7	3,1	2,7	3	2,3	3,2	3
Fax 2	2,8	2	2,4	2	1,9	2,7				

Suponiendo que el tiempo de utilización de cada fax sigue una distribución normal, determinar un intervalo de confianza al 95% para la diferencia de utilización media de los fax suponiendo:

- que las varianzas poblacionales son $\sigma_1^2 = 0,1$ y $\sigma_2^2 = 0,15$.
- Que las varianzas de utilización de los fax son desconocidas pero iguales.

13.- Se quiere estimar mediante un intervalo de confianza el porcentaje de suspensos de una determinada asignatura. Para ello se eligieron al azar 150 estudiantes de la asignatura en cuestión observándose, entre ellos, 60 suspensos. Determinar un intervalo de confianza deseado para un nivel de confianza de 0,95.

14.- (2005) Dos empresas de estudios pregunta a 100 y 200 individuos de diferentes provincias si van a votar en las próximas elecciones. Se obtuvieron 40 y 100 respuestas afirmativas, respectivamente. Calcular el intervalo de confianza del 95%. *para la diferencia de media*

15. (2005) Para comparar dos operadores de acceso a Internet se trata de acceder desde dos ordenadores idénticos conectados mediante cada uno de los operadores a las mismas 10 páginas Web. Los tiempos de acceso obtenidos en segundos son:

Página	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Operador A	7.1	6.8	6.9	7.4	6.5	6.3	7.5	7.9	7.2	5.6
Operador B	7.3	7.1	6.8	7.3	6.9	6.4	7.2	8.1	6.9	5.7

Suponiendo normalidad en la distribución de los tiempos de acceso, encontrar el intervalo de confianza para la diferencia de tiempos medios de acceso para ambos operadores al 95%.

16. (2006) Un fabricante de hardware está estudiando la calidad de un nuevo chip más barato para el montaje en uno de sus productos. En una muestra de 200 de los nuevos chips 6 resultaron defectuosos. Dar una estimación del intervalo de confianza para la proporción de chips nuevos defectuosos con nivel de confianza del 95%.

17. (2006) La duración de anuncios televisivos sigue una distribución normal. Se obtuvo una muestra aleatoria de 24 anuncios, cuya duración media fue de 14.481 y su desviación típica 2.343 segundos. Dar una estimación del intervalo de confianza para la duración media de los anuncios televisivos con nivel de confianza del 95%.

18. (2007) Se usaron muestras de 1545 hombres y 1961 mujeres para comparar la cantidad de labores domésticas hechas por hombres y mujeres. El estudio indicó que el 67,5% de los hombres y el 60,8% de las mujeres creían que la división de las tareas era justa. Calcular el intervalo de confianza al 90% para la diferencia de proporciones entre hombres y mujeres que creen que la división de las tareas es justa.

Resultados Boletín 2. Inferencia Estadística: Intervalos de confianza

1. a) I.C.=(17'3312,24'6688) b) I.C.=(10'396,83'6)
2. $n \geq 9605 p(1-p)$
3. a) I.C._{n=100}=(4'412,5'588) I.C._{n=10}=(3'14,6'86) I.C._{n=1000}=(4'814,5'186)
b) $n \geq 5968$ $m = 5968$
4. a) I.C.=(0'799,1'001) b) Error=0'101 $\Rightarrow (0'824, 0'976); E=0'076$
5. I.C.=(0.19, 3.55)
6. a) $\hat{N} = 300$ b) I.C.=(166.7, 1488.1)
1501.5
7. I.C.=(-0'0424, 3158)
8. a) I.C.=(989'85, 1000'15) b) $n \geq 27$
(-0'034, 0'114)
9. I.C.=(0'034, 0'114)
10. $n \geq 769$ (126'27)
11. a) (122,61; 126,72) b) $n \geq 60$
12. a) (0,133; 0,867) b) (0,114; 0,885)
13. (0,3216; 0,4784)
14. (-0.0176; 0.2176)
15. (-0.27; 0.12)
16. $(6.3578 \times 10^{-3}, 5.3642 \times 10^{-2})$
17. (13.4706, 15.49)
18. (0,0403; 0,0937)

① muestra de 9 entidades

sigue una normal

media y desviación típica desconocida
poblacional poblacional

media muestral - 21 unidades

desviación típica - 4'5 unidades

obtener un intervalo de confianza al 95% de la media poblacional

$$n=9$$

$$N(\mu, \sigma)$$

$$\bar{x}=21$$

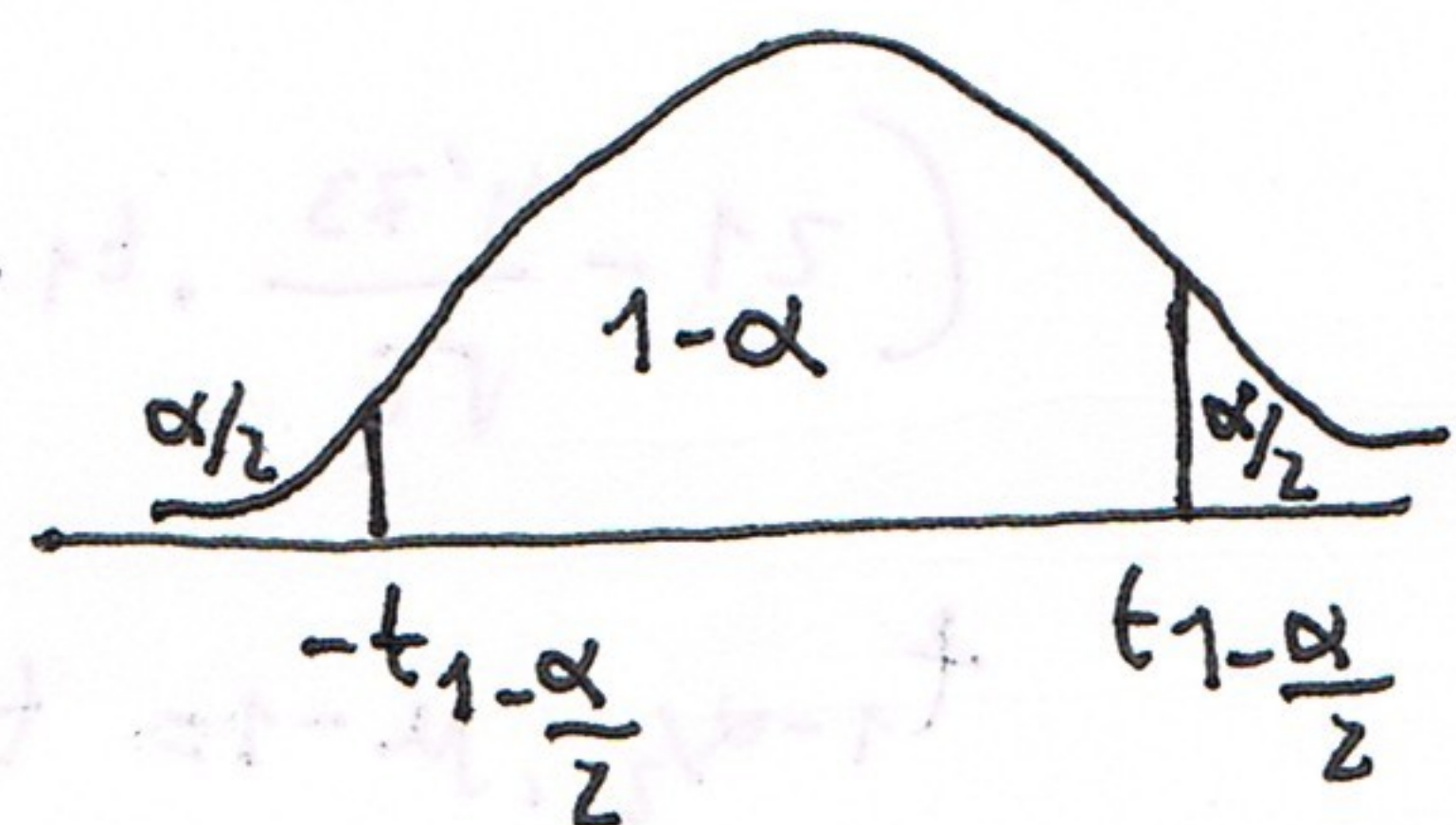
$$s=4'5$$

nivel de confianza ~~95%~~ 95% = 0'95**Paso 1** Elección del estadístico

para	Suposición	Estadístico Pivotal	Distribución
μ	σ^2 desconocida	$\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{s}_x}$	t_{n-1}

Paso 2 Planteamiento del enunciado probabilístico

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{s}_x} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$



Paso 3] Transformación del enunciado probabilístico]

$$P\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} < \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{S}_x} < t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} < \sqrt{n} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{S}_x} < t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}_x < \sqrt{n}(\bar{x} - \mu) < t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}_x\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{-t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}_x}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < \frac{t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}_x}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{-t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}_x}{\sqrt{n}} - \bar{x} < -\mu < \frac{t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}_x}{\sqrt{n}} - \bar{x}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}} - \bar{x} < -\mu < t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}} - \bar{x}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(+t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}} + \bar{x} < \mu < -t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}} + \bar{x} < \mu < t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}} + \bar{x}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{x} - t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

El intervalo de confianza para $1-\alpha$ es

$$\left(\bar{x} - \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{x} + \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{n}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\bar{x} = 21 \quad \hat{S}_x^2 = \text{variancia} = \frac{n \cdot s^2}{n-1} = \frac{9 \cdot 4'5^2}{8} = 22'78125 = \checkmark$$

$$\hat{S}_x = \sqrt{\hat{S}_x^2} = \sqrt{22'78125} = 4'773$$

$$\left(21 - \frac{4'773}{\sqrt{9}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}, 21 + \frac{4'773}{\sqrt{9}} \cdot t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$t_{1-\alpha/2, n-1} = t_{0'975, 8} = 2'306$$

$$\left(21 - \frac{4'773}{3} \cdot 2'306, 21 + \frac{4'773}{3} \cdot 2'306\right)$$

$$(12'3312, 24'6688)$$

intervalo de confianza al 95%

longitud inferior al 0.04

tamaño de la muestra?

8

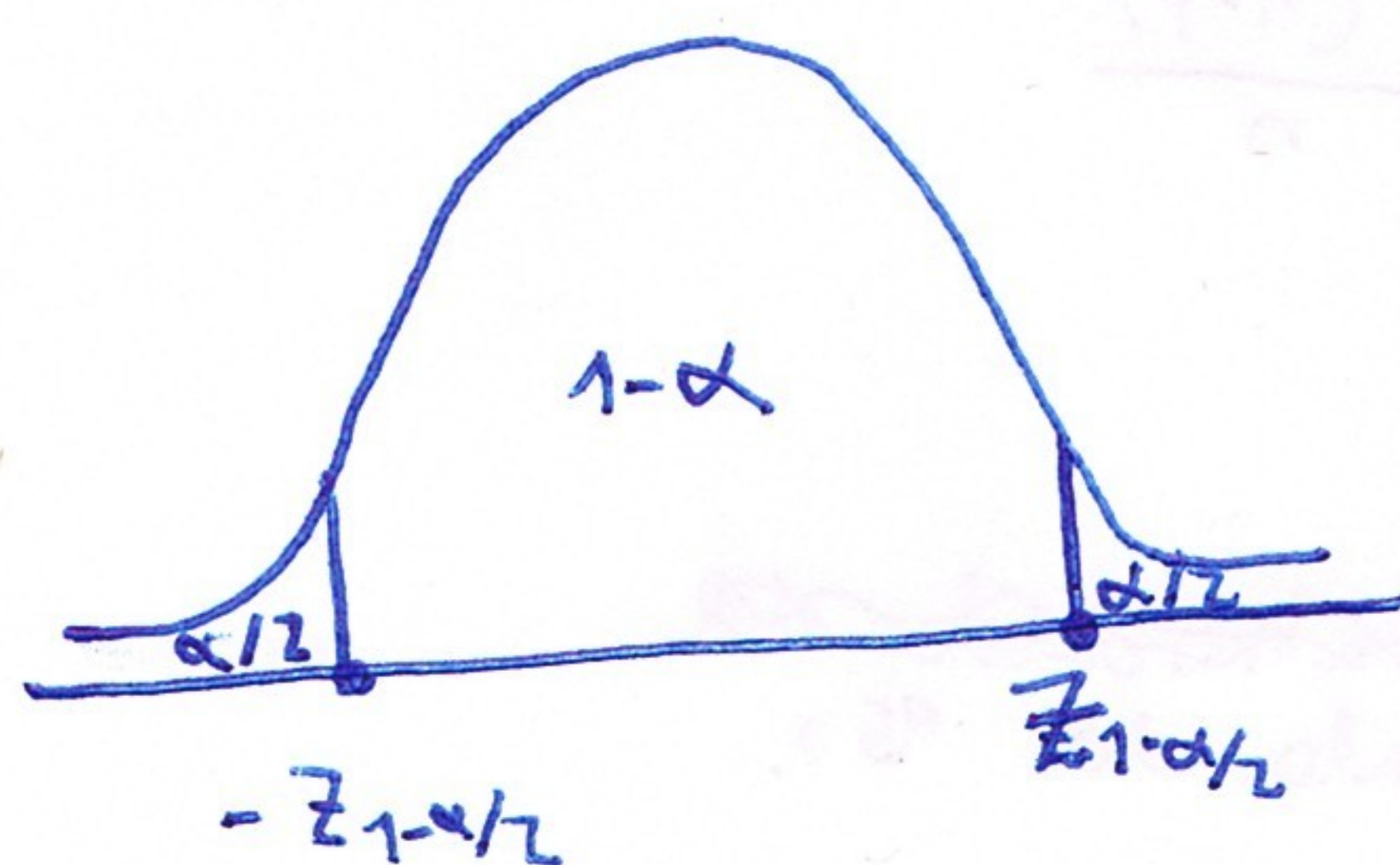
$n = ?$

Paso 1 Elección del estadístico

Como lo que nos pide es una proporción utilizamos el estadístico pivotal para una proporción

$$P \cdot \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$$

Paso 2 Planteamiento del enunciado probabilístico



$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Paso 3 Transformación del enunciado probabilístico

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \hat{p} - p < z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \hat{p} - p < z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < -p < -\hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\begin{array}{c} -4 < -3 < -2 \\ \downarrow \\ 2 < 3 < 4 \end{array}$$

$$P\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

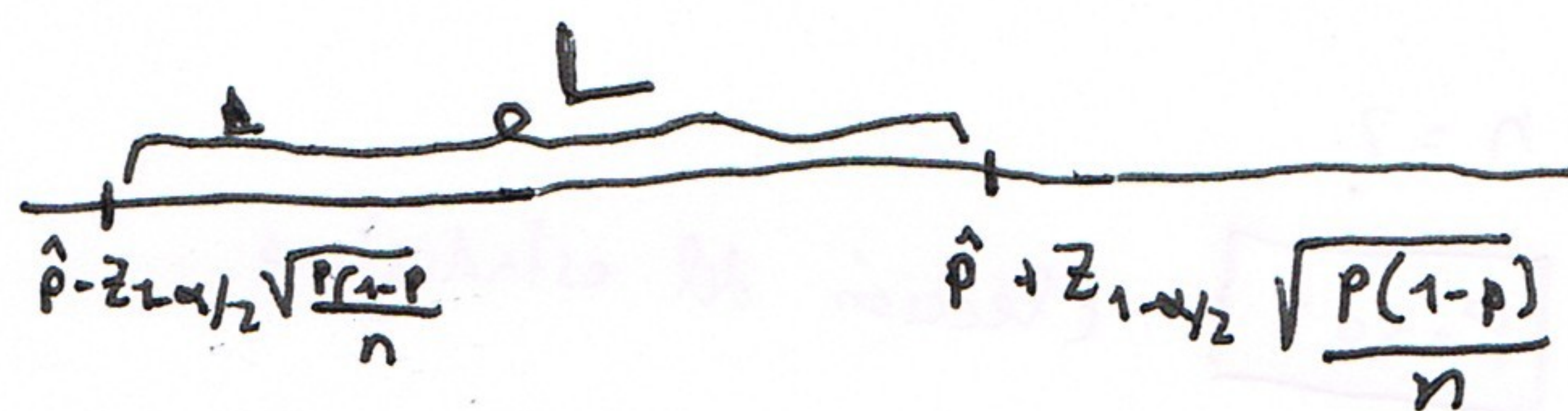
Nuestro intervalo de confianza sera

$$\left(\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

hallamos la longitud



$$L = b - a$$



$$L = \left(\hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right) - \left(\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right)$$

$$L = \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} - \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$L = Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$L = 2 \cdot Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

~~Nos piden una probabilidad del~~
Nos piden un intervalo del 95%.

$$P(Z < K) = 0.975$$

$\Rightarrow$

$$P(Z > K) = 0.0250$$

$$K = 1.96$$

~~hacer~~

$$L = 2 \cdot 1.96 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < 0.04$$

Nos piden n , como p es desconocida buscamos el caso mas ~~probable~~ desfavorable que se produce cuando la longitud es maxima.

La longitud sera maxima cuando lo sea $p(1-p)$

Buscamos el maximo de $f(p) = p(1-p) = p - p^2$

$$f'(p) = 1 - 2p = 0 \Rightarrow p = 0.5$$

$$f''(p) = -2 < 0$$

efectivamente el maximo se produce para $p = 0.5$

$p(1-p) = 0.5(1-0.5) = 0.5^2 = 0.25$ es el valor maximo de $p(1-p)$

$$L_{MAX} = 2 \cdot 1.96 \sqrt{\frac{0.25}{n}} < 0.04$$

$$L_{MAX} = 15.3664 \cdot \frac{0.25}{n} < 0.016$$

$$\frac{15.3664 \cdot 0.25}{0.0016} < n \Rightarrow n > 2401$$

$$n \geq 2402$$

③

9

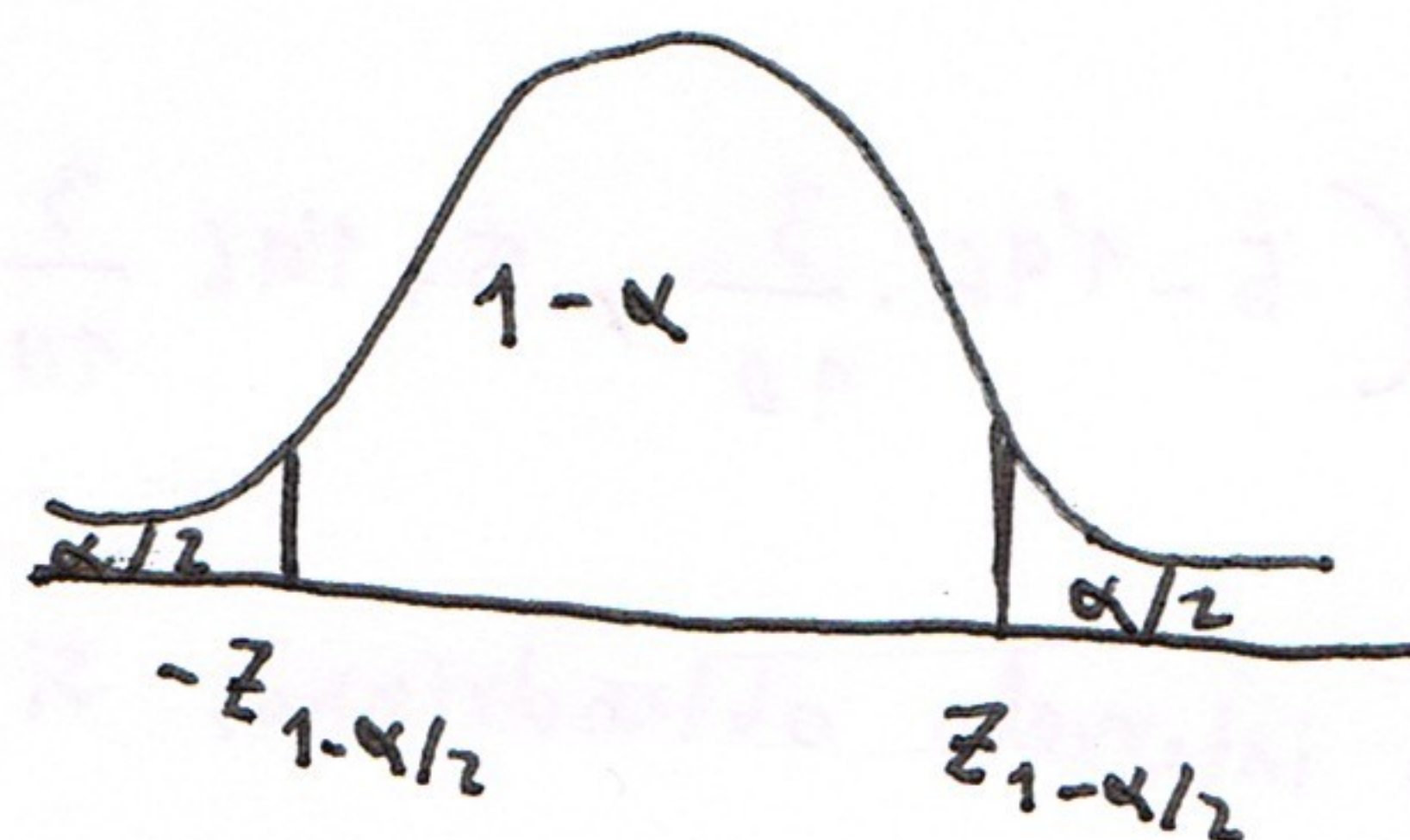
Intervalo de confianza al 95% para μ
 distribución normal
 Varianza σ^2
 $N = 100$
 media = 5

Paso 1: Elección del estadístico

Para	Suposición	Estadístico Pivotal	Distribución
μ	σ^2 conocida	$\sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$	$N(0,1)$

Paso 2: Planteamiento del enunciado probabilístico

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} < \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$



Paso 3: Transformación del enunciado probabilístico

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} < \sqrt{n} \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\sigma(-Z_{1-\alpha/2}) < \sqrt{n}(\bar{x} - \mu) < \sigma(Z_{1-\alpha/2})\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{\sigma(-Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}} < \bar{x} - \mu < \frac{\sigma(Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\cancel{P\left(\frac{\sigma(-Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}} + \mu < \bar{x} < \frac{\sigma(Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}} + \mu\right) = 1 - \alpha}$$

$$P\left(\frac{\sigma(-Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}} - \bar{x} < -\mu < \frac{\sigma(Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}} - \bar{x}\right) = 1 - \alpha$$

En

$$\begin{array}{c} -4 < -3 < -2 \\ \downarrow \\ 2 < 3 < 4 \end{array}$$

Intervalo de confianza

$$P\left(\bar{x} - \frac{\sigma(Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} - \frac{\sigma(-Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

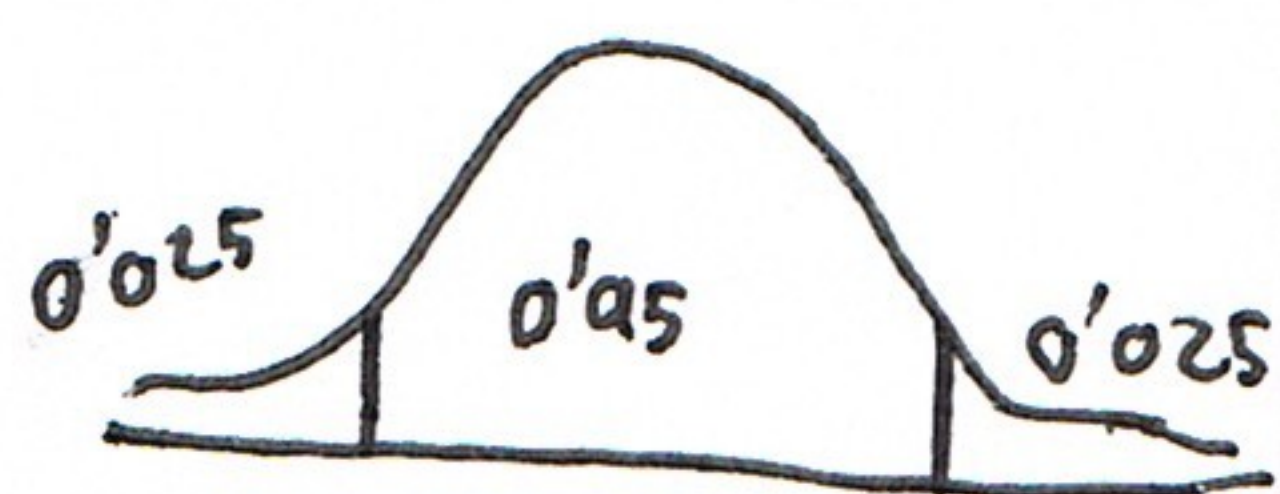
Intervalo de confianza

$$\left(\bar{x} - \frac{\sigma(Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}}, \bar{x} - \frac{\sigma(-Z_{1-\alpha/2})}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

int
intervalo de confianza

$$\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

nos pedirán un intervalo al 95%.



$$P(Z < k) = 0.975 \Rightarrow P(Z > k) = 0.025$$

$$k = 1.96$$

$$\left(5 - 1.96 \cdot \frac{3}{10}, 5 + 1.96 \cdot \frac{3}{10} \right) = (4.412, 5.588)$$

¿Que intervalo obtendríamos si $n=10$?

$$\left(5 - 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}, 5 + 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \right) = (3.140580736, 6.859419264)$$

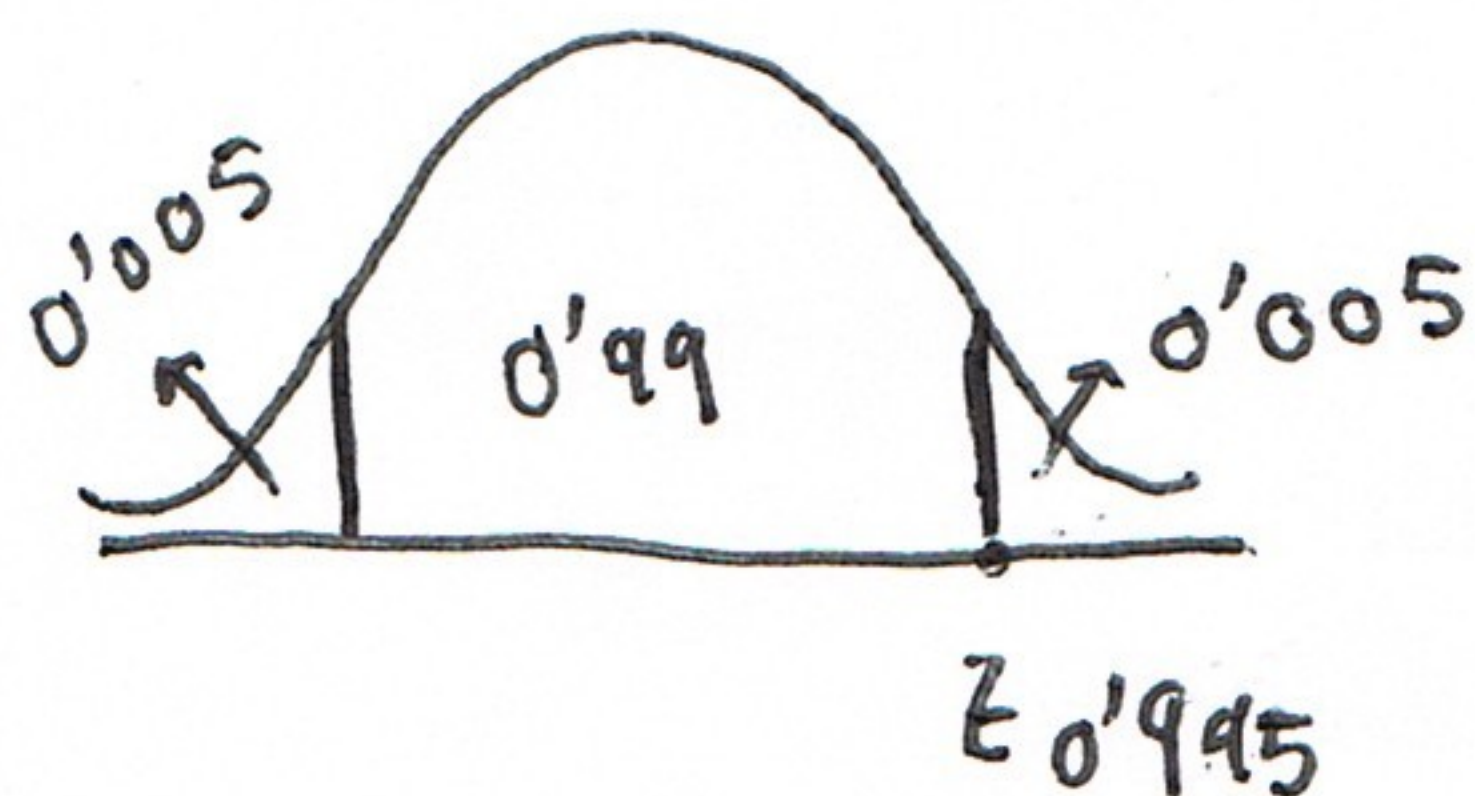
¿Y si $n=1000$?

$$\left(5 - 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{1000}}, 5 + 1.96 \cdot \frac{3}{\sqrt{1000}} \right) = (4.814058074, 5.185941926)$$

Calcular el tamaño de la muestra que se debería coger si deseamos obtener un intervalo al nivel 0.99 y de longitud 0.2

$$L = \left(\bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$L = \left(2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$



$$P(Z < k) = 0.995 \Rightarrow P(Z > k) = 0.005$$

$$k = 2.575$$

$$L = 2 \cdot 2.575 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.2$$

$$\sqrt{n} = \frac{2 \cdot 2.575 \cdot 3}{0.2} = 77.25$$

$$\sqrt{n} = 77.25$$

$$n = 5968$$

(4)

$p = 0.8$ es el sistema actual no es nuevo NO SE USA

(10)

muestra 60 lanzamientos

54 éxito

$$\hat{p} = \frac{54}{60} = 0.9$$

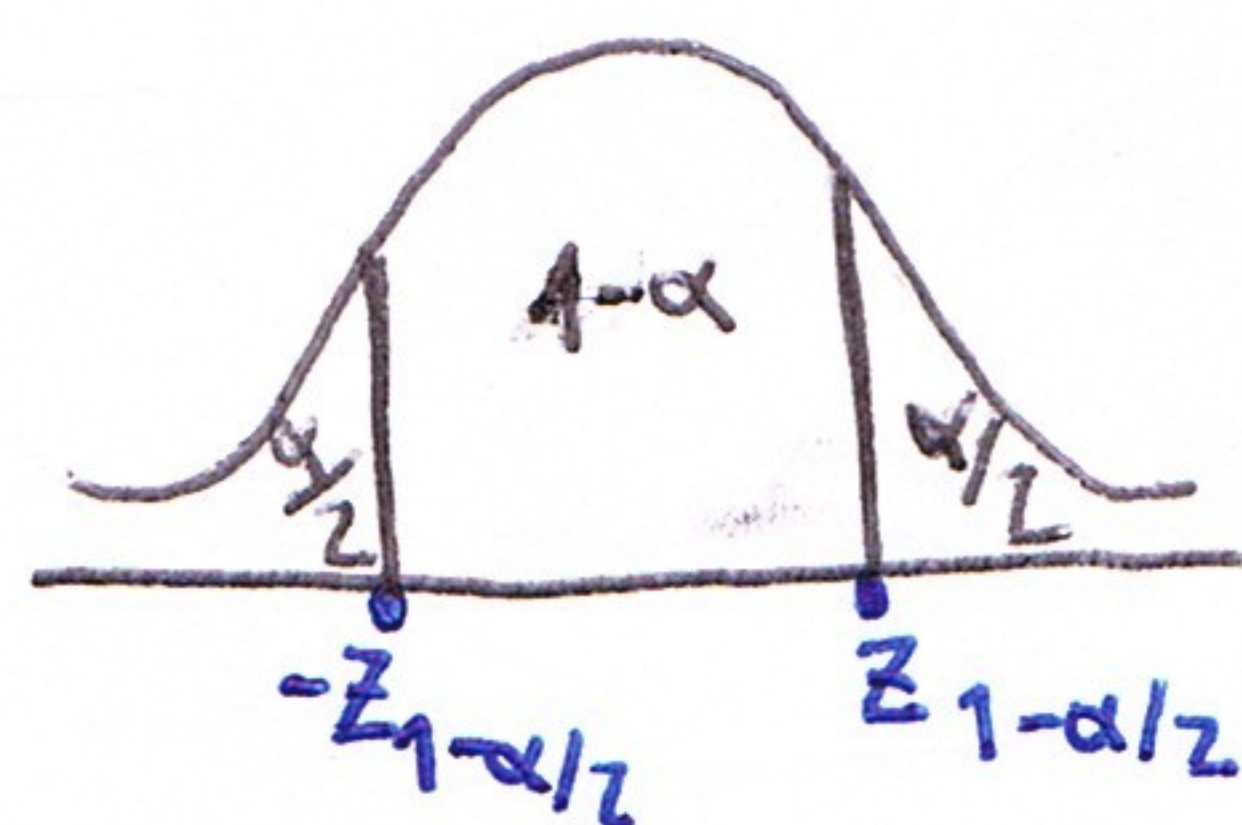
el numero de lanzamientos > 30 por lo tanto es una muestra grande

a) Calcular un intervalo de confianza del 95% para p

Paso 1 Elección del estadístico

para	Estadístico Pivotal	Distribución
p	$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$	$N(0,1)$

Paso 2 Planteamiento del enunciado probabilístico



$$1-\alpha = 95\%$$

$$\alpha/2 = 0.25\%$$

$$p_{\alpha/2} =$$

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \hat{p} - p < Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < -p < -\hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$\begin{array}{c} -4 < -3 < -2 \\ \Downarrow \\ 2 < 3 < 4 \end{array}$$

$$P\left(\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < p < \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) = 1-\alpha$$

Nuestro intervalo de confianza sera

$$\left(\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p} + Z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

Si nuestro intervalo de confianza es:

$$\left(\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}, \hat{p} + Z_{1+\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} \right)$$

En realidad el intervalo de confianza para las proporciones no se puede por aparecer P (desconocida) en los extremos del intervalo.

Una aproximación se obtiene al sustituir P por su estimador insesgado $\hat{p}$ quedando

$$\left(\hat{p} - Z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + Z_{1+\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

$$\left(0.9 - 1.96 \sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{60}}, 0.9 + 1.96 \sqrt{\frac{0.9(1-0.9)}{60}} \right)$$

$$\left(0.9 - 1.96 \sqrt{\frac{0.9(0.1)}{60}}, 0.9 + 1.96 \sqrt{\frac{0.9(0.1)}{60}} \right)$$

$$\left(0.9 - 1.96 \sqrt{\frac{0.09}{60}}, 0.9 + 1.96 \sqrt{\frac{0.09}{60}} \right)$$

$$\left(0.9 - 1.96 \sqrt{\frac{0.0013}{0.0015}}, 0.9 + 1.96 \sqrt{\frac{0.0013}{0.0015}} \right)$$

$$\left(0.9 - 0.075910473, 0.9 + 0.075910473 \right)$$

$$\left(0.8240895, 0.9759104 \right)$$

6)

Calculamos la longitud del intervalo

$$E = \frac{L}{2}$$

$$E = \frac{0.9759104 - 0.8240895}{2} = \frac{0.151820947}{2} = 0.075910473$$

5 Dos muestras de dos poblaciones normales han dado los siguientes resultados 11

$$n_1 = 8 \quad \sum_{i=1}^8 x_i = 12 \quad \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 46$$

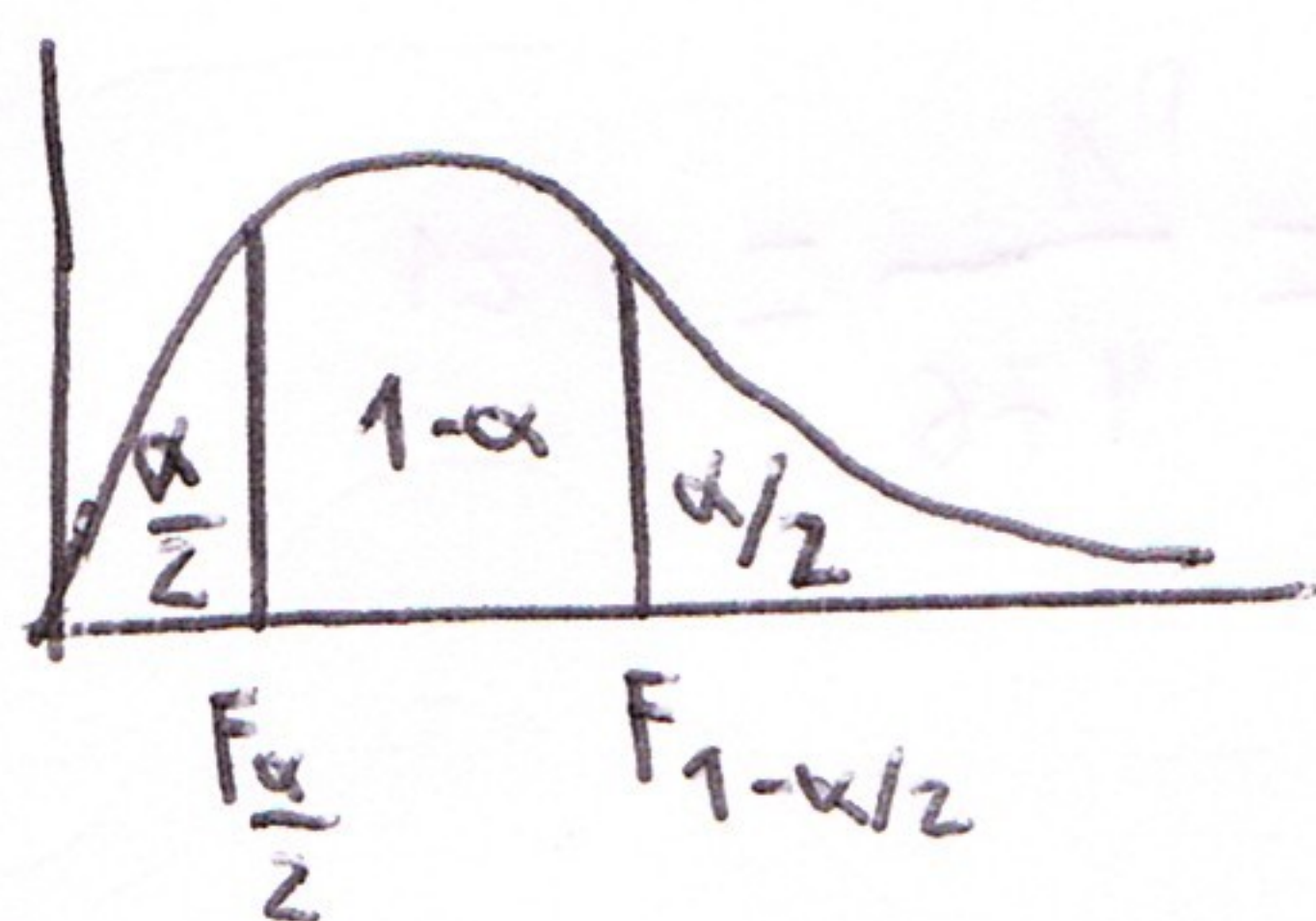
$$n_2 = 11 \quad \sum_{i=1}^{11} x_i = 22 \quad \sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 80$$

Obtener un intervalo de confianza para el cociente de varianzas poblacionales al 95%

Paso 1 Elección del estadístico pivotal

para	suposición	Estadístico Pivotal	Distribución
$\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$		$\frac{\hat{S}_x^2}{\hat{S}_y^2} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}$	$F_{n-1, m-1}$

Paso 2 Planteamiento del enunciado probabilístico



$$P\left(F_{\alpha/2} < \frac{\hat{S}_x^2}{\hat{S}_y^2} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} < F_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Paso 3 Transformación del enunciado probabilístico

$$P\left(F_{\alpha/2} < \frac{\hat{S}_x^2}{\hat{S}_y^2} \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} < F_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(F_{\alpha/2} \frac{\hat{S}_y^2}{\hat{S}_x^2} < \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} < F_{1-\alpha/2} \frac{\hat{S}_y^2}{\hat{S}_x^2}\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza

$$\left(F_{\alpha/2} \frac{\hat{S}_y^2}{\hat{S}_x^2} < \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} < F_{1-\alpha/2} \frac{\hat{S}_y^2}{\hat{S}_x^2}\right)$$

$$\left(F_{\alpha/2} \frac{\hat{S}_y^2}{\hat{S}_x^2}, F_{1-\alpha/2} \frac{\hat{S}_y^2}{\hat{S}_x^2}\right)$$

aplicamos nuestro caso

$$\left(F_{\alpha/2} \cdot \frac{S_y^2}{S_x^2}, F_{1-\alpha/2} \frac{S_y^2}{S_x^2} \right)$$

$$\hat{S}_x^2 = \frac{n \cdot S_x^2}{n-1} = \frac{8 \cdot 3.5}{7} = 4$$

$$S_x^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{46}{8} - \left(\frac{12}{8} \right)^2 = 3.5$$

$$\hat{S}_y^2 = \frac{n \cdot S_y^2}{n-1} = \frac{11 \cdot 3.272727273}{10} = 3.6$$

$$S_y^2 = \frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{80}{11} - \left(\frac{22}{11} \right)^2 = 3.272727273$$

$$F_{\alpha/2; n-1; m-1} = F_{0.025; 7; 10} = \frac{1}{F_{0.975; 10; 7}} = \frac{1}{4.76} = 0.21$$

$$F_{1-\alpha/2; n-1; m-1} = F_{0.975; 7; 10} = 3.95$$

$$IC \left(0.21 \frac{3.6}{4}, 3.95 \frac{3.6}{4} \right) = (0.189, 3.555)$$

7 Una compañía contrata 10 tubos con filamentos de tipo A y 10 de tipo B. Las duraciones de vida observadas han sido

A: 1'614 , 1'094 , 1'293 , 1'643 , 1'466 , 1'270 , 1'340 , 1'380 , 1'028 , 1'497

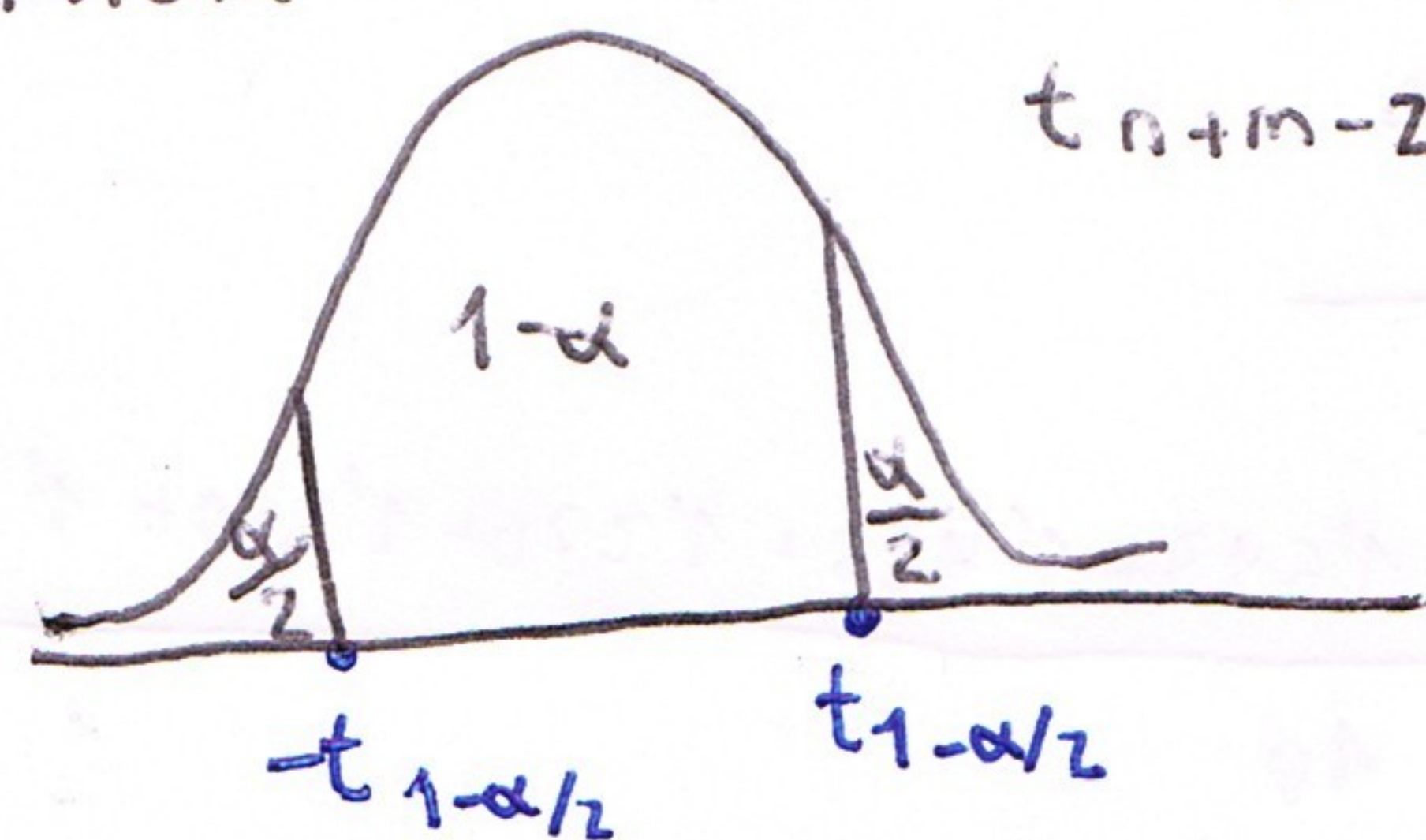
B: 1'383 , 1'138 , 1'092 , 1'143 , 1'017 , 1'061 , 1'627 , 1'021 , 1'711 , 1'065

Suponiendo que las varianzas son iguales, encontrar un intervalo de confianza para la diferencia de medias al 90%.

Paso 1 Elección del estadístico

Para	Suposición	Estadístico Pivotal	Distribución
$\mu_x - \mu_y$		$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\hat{s} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$ $\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2}{n + m - 2}$	t_{n+m-2}

Paso 2 Planteamiento del enunciado probabilístico



$$P\left(-t_{1-\alpha/2} < \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\mu_x - \mu_y)}{\hat{s} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} < t_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

Paso 3 Transformación del enunciado probabilístico

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} < \frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y)}{\hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} < t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} < (\bar{x}-\bar{y})-(\mu_x-\mu_y) < t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-(\bar{x}-\bar{y})-t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} < -(\mu_x-\mu_y) < -(\bar{x}-\bar{y})+t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right) = 1-\alpha$$

$$\begin{array}{c} -3 < -2 < -1 \\ \Downarrow \\ 1 < 2 < 3 \end{array}$$

$$P\left((\bar{x}-\bar{y})-t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} < (\mu_x-\mu_y) < (\bar{x}-\bar{y})+t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right) = 1-\alpha$$

queda el intervalo

$$\left((\bar{x}-\bar{y})-t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}, (\bar{x}-\bar{y})+t_{1-\alpha/2} \cdot \hat{S}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}\right)$$

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^m (y_j - \bar{y})^2}{n+m-2}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1'614 + 1'094 + 1'293 + 1'643 + 1'466 + 1'270 + 1'340 + 1'380 + 1'028 + 1'497}{10} = \frac{13'625}{10} = 1'3625$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{m} = \frac{1'283 + 1'138 + 1'092 + 1'143 + 1'017 + 1'061 + 1'627 + 1'021 + 1'711 + 1'065}{10} = \frac{12'258}{10} = 1'2258$$

$$\hat{S}^2 = \frac{0'3689165 + 0'5921156}{10+10-2} = \frac{0'9610321}{18}$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{0'9610321}{18}} = 0'231064216$$

$$\left((1'3625 - 1'2258) = t_{0'95,18} \cdot 0'231064216 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} \right), (1'3625 - 1'2258) + t_{0'95,18} \cdot 0'2310 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}} \quad (13)$$

$$\frac{1'734}{1'734}$$

$$\left(\begin{array}{l} \cancel{0'1367}, \quad 0'315882992 \\ -0'04249 \end{array} \right)$$

9

19

- A 200 elementos 16 defectuosos
- B 100 elementos 12 defectuosos

Calcular un intervalo de confianza para la diferencia de proporciones de defectuosos en ambas máquinas con $\alpha = 0.05$

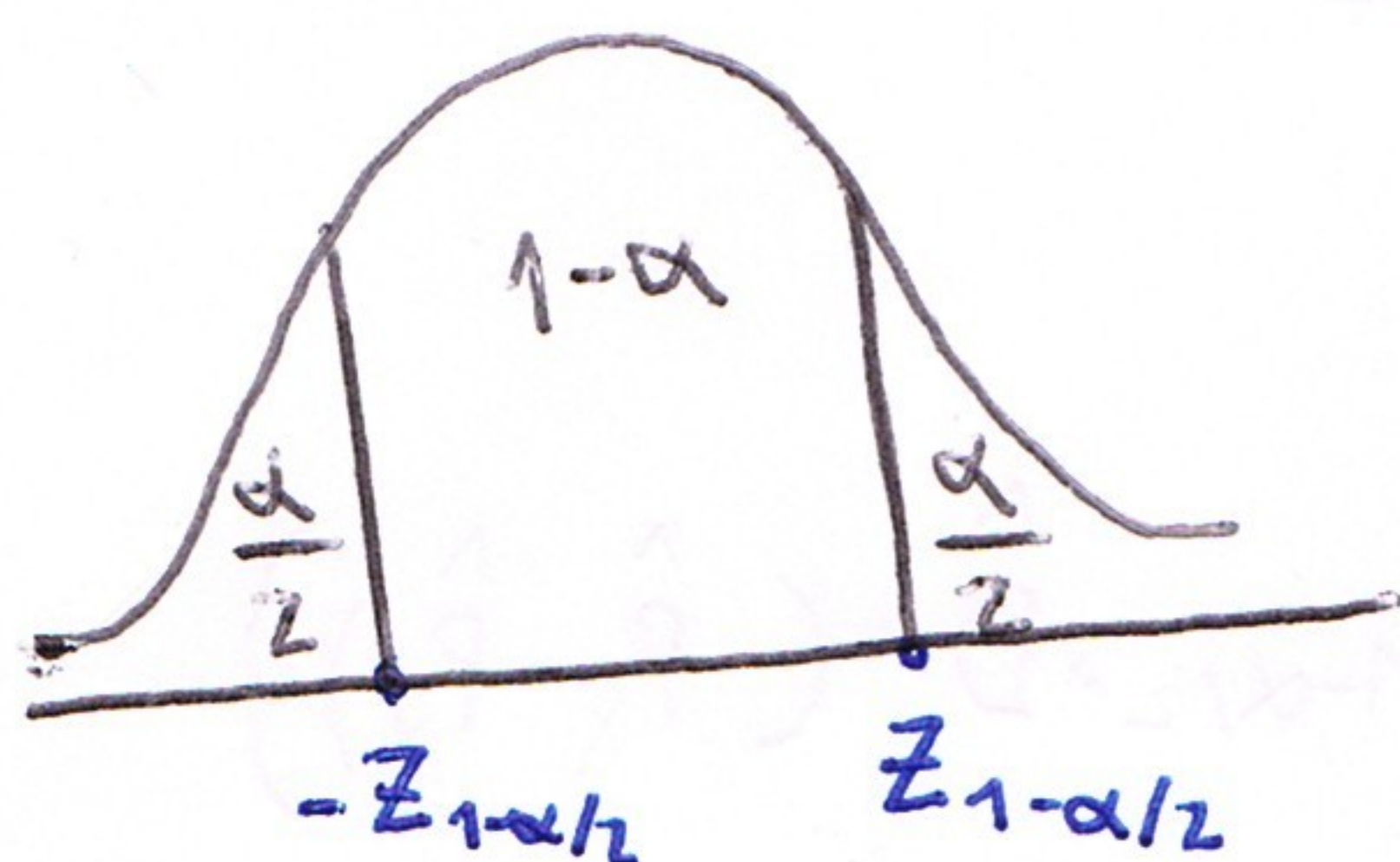
$$P_A(\text{defectuosos}) = \frac{16}{200} = 0.08 \hat{P}_x$$

$$P_B(\text{defectuosos}) = \frac{12}{100} = 0.12 \hat{P}_y$$

Paso 1 Elección del estadístico

Para	Estadístico Pivotal	Distribución
$P_x - P_y$	$\frac{(\hat{P}_x - \hat{P}_y) - (P_x - P_y)}{\sqrt{\frac{P_x(1-P_x)}{n} + \frac{P_y(1-P_y)}{m}}}$	$N(0,1)$

Paso 2 Planteamiento del enunciado Probabilístico



$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} \leq \frac{(\hat{P}_x - \hat{P}_y) - (P_x - P_y)}{\sqrt{\frac{P_x(1-P_x)}{n} + \frac{P_y(1-P_y)}{m}}} < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$



$$D = \sqrt{\frac{P_x(1-P_x)}{n} + \frac{P_y(1-P_y)}{m}}$$

Le llamamos D a la parte de abajo para facilitar la transformación

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} \leq \frac{(\hat{P}_x - \hat{P}_y) - (P_x - P_y)}{D} < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Paso 3 Transformación del enunciado probabilístico

$$P(-Z_{1-\alpha/2} < \frac{(\hat{P}_x - \hat{P}_y) - (P_x - P_y)}{D} < Z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$P(-Z_{1-\alpha/2} \cdot D < (\hat{P}_x - \hat{P}_y) - (P_x - P_y) < Z_{1-\alpha/2} \cdot D) = 1-\alpha$$

$$P(-Z_{1-\alpha/2} \cdot D - (\hat{P}_x - \hat{P}_y) < -(P_x - P_y) < Z_{1-\alpha/2} \cdot D - (\hat{P}_x - \hat{P}_y)) = 1-\alpha$$

$$\begin{array}{c} -3 < -Z < -1 \\ \Downarrow \\ 1 < Z < 3 \end{array}$$

$$P(-Z_{1-\alpha/2} \cdot D + (\hat{P}_x - \hat{P}_y) < (P_x - P_y) < Z_{1-\alpha/2} \cdot D + (\hat{P}_x - \hat{P}_y)) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza

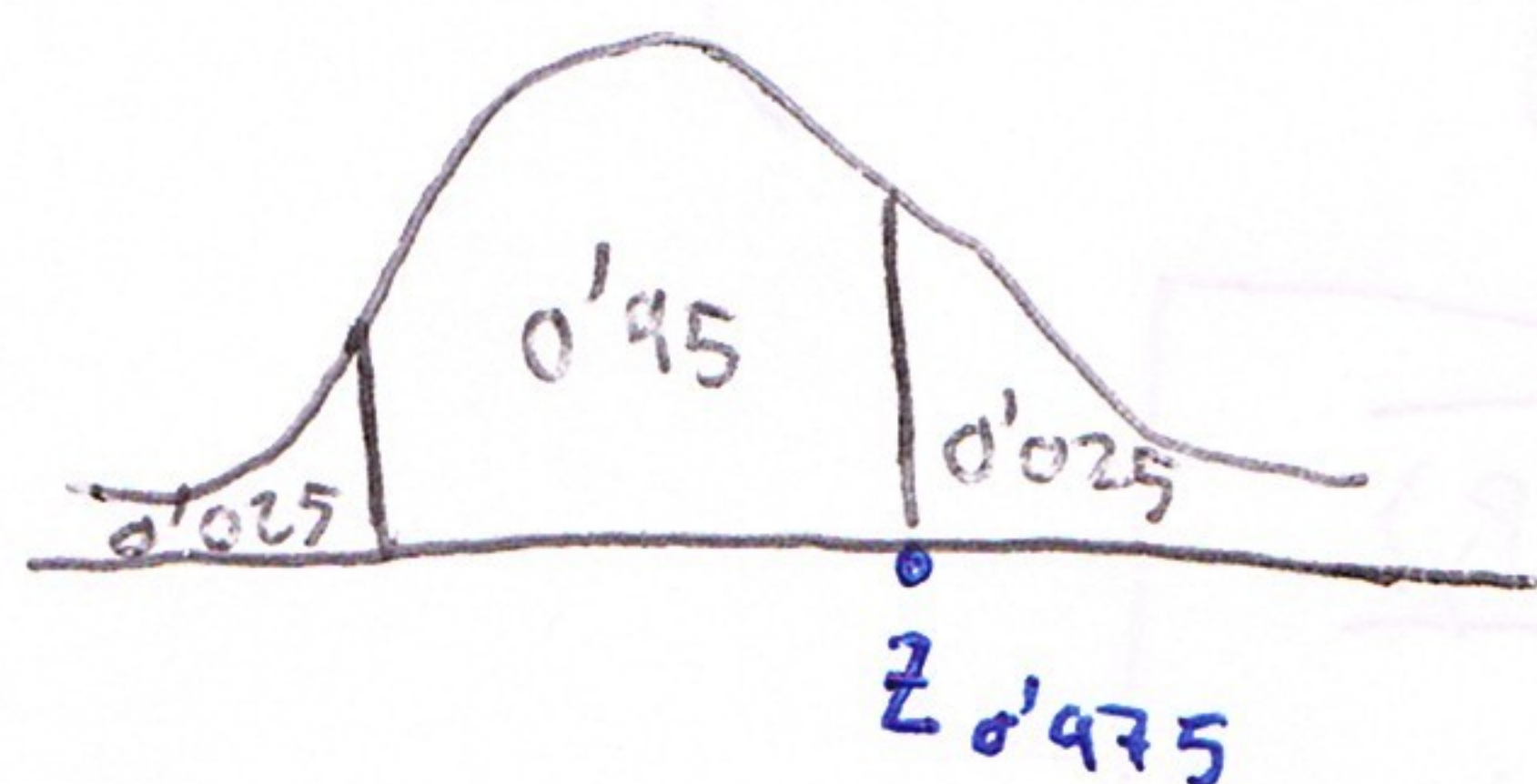
$$(-Z_{1-\alpha/2} \cdot D + (\hat{P}_x - \hat{P}_y), Z_{1-\alpha/2} \cdot D + (\hat{P}_x - \hat{P}_y))$$

Como no tenemos los datos de P_x y P_y que están dentro de D sustituimos D por $\hat{D}$ donde se substituye P_x y P_y por $\hat{P}_x$ y $\hat{P}_y$

$$\hat{D} = \sqrt{\frac{\hat{P}_x(1-\hat{P}_x)}{n} + \frac{\hat{P}_y(1-\hat{P}_y)}{m}}$$

$$(-Z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{D} + (\hat{P}_x - \hat{P}_y), Z_{1-\alpha/2} \cdot \hat{D} + (\hat{P}_x - \hat{P}_y))$$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha = 0.95$



$$P(Z > K) = 0.025$$

$$K = 1.96$$

$$\left(-1.96 \left(\sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{200} + \frac{0.12(1-0.12)}{100}} \right) + (0.08 - 0.12), 1.96 \left(\sqrt{\frac{0.08(1-0.08)}{200} + \frac{0.12(1-0.12)}{100}} \right) + (0.08 - 0.12) \right)$$

$$\left(-1.96 \left(\sqrt{\frac{0.0736}{200} + \frac{0.1056}{100}} \right) + (-0.04), 1.96 \left(\sqrt{\frac{0.0736}{200} + \frac{0.1056}{100}} \right) - 0.04 \right)$$

$$\left(-1.96 \left(\sqrt{0.000368 + 0.001056} \right) - 0.04, 1.96 \sqrt{0.002112} - 0.04 \right)$$

$$\left(-0.00413952 - 0.04, 0.00413952 - 0.04 \right)$$

$$\left(-0.04413952, -0.03586048 \right)$$

$$\left(-0.090074742 - 0.04, 0.090074742 - 0.04 \right)$$

$$\left(-0.130074742, 0.050074742 \right)$$

(15)

Son muestras pareadas de una población normal.

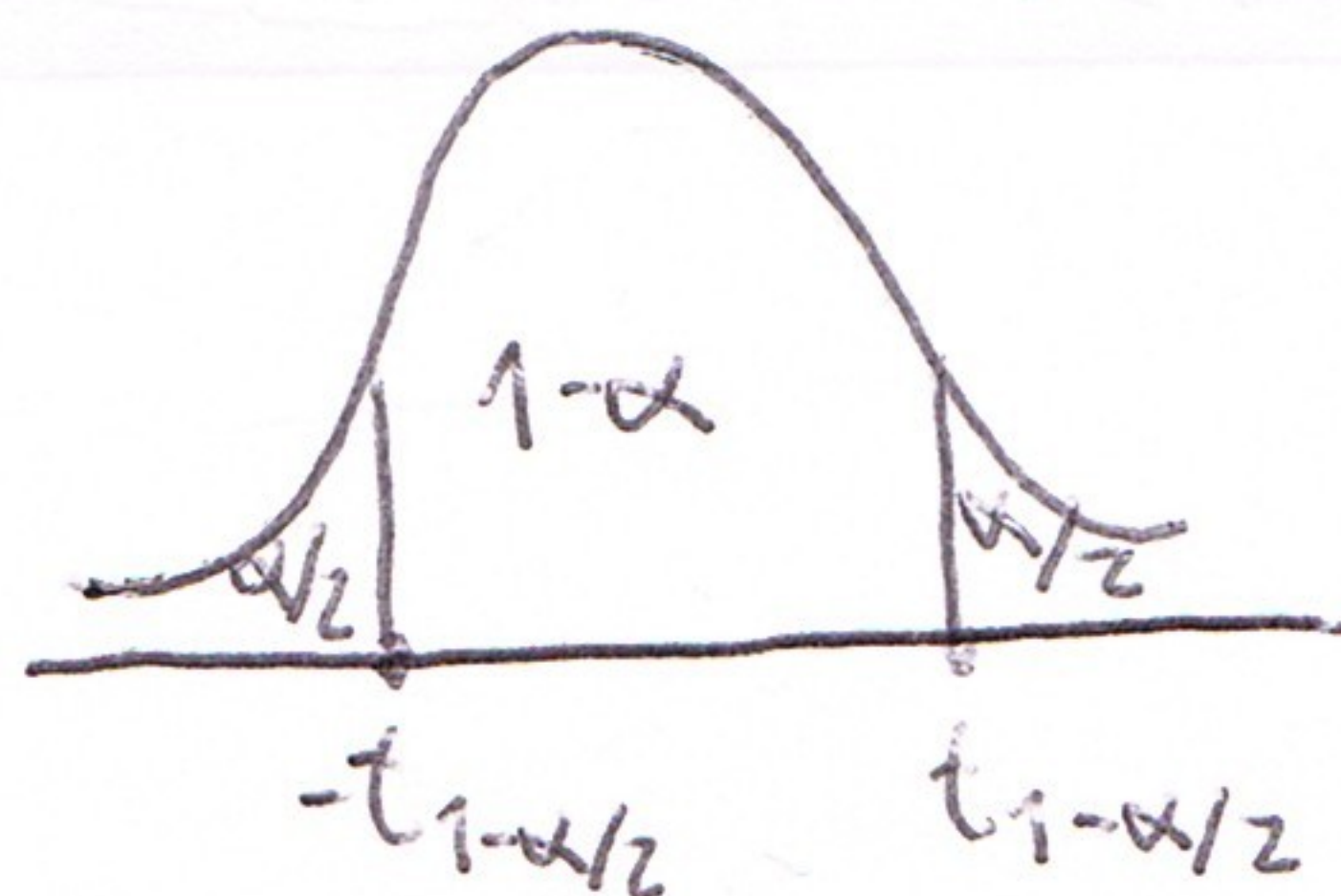
(16)

Intervalo de confianza de la diferencia de medias

Paso 1 Elección del estadístico

Para	Estadístico Pivotal	Distribución
$\mu_x - \mu_y$ $Z_i = X_i - Y_i$	$\sqrt{n} \frac{\bar{Z} - \mu_Z}{\hat{S}_Z}$	t_{n-1}

Paso 2 Planteamiento del enunciado probabilístico:



$$P\left(-t_{1-\alpha/2} < \sqrt{n} \frac{\bar{Z} - \mu_Z}{\hat{S}_Z} < t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} < \sqrt{n} \frac{\bar{Z} - \mu_Z}{\hat{S}_Z} < t_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_Z}{\sqrt{n}} < \bar{Z} - \mu_Z < t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_Z}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(-t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_Z}{\sqrt{n}} - \bar{Z} < -\mu_Z < t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_Z}{\sqrt{n}} - \bar{Z}\right) = 1-\alpha$$

$$\begin{array}{c} -3 < -2 < -1 \\ \Downarrow \\ 1 < 2 < 3 \end{array}$$

$$P\left(\bar{Z} - t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_Z}{\sqrt{n}} < \mu_Z < \bar{Z} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_Z}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Intervalo de confianza

$$\left(\bar{Z} - t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_Z}{\sqrt{n}}, \bar{Z} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_Z}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(\bar{z} - t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_z}{\sqrt{n}}, \bar{z} + t_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\hat{S}_z}{\sqrt{n}} \right)$$

Calculamos los z_i $z_i = X_i - Y_i$

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_i	7'1	6'8	6'9	7'4	6'5	6'3	7'5	7'9	7'2	5'6
Y_i	7'3	7'1	6'8	7'3	6'9	6'4	7'2	8'1	6'9	5'7
z_i	-0'2	-0'3	0'1	0'1	-0'4	-0'1	0'3	-0'2	0'3	-0'1

$$\bar{z} = \frac{\sum z_i}{n} = \frac{-0'2 - 0'3 + 0'1 + 0'1 - 0'4 - 0'1 + 0'3 - 0'2 + 0'3 - 0'1}{10} = \frac{-0'5}{10} = -0'05$$

$$S_z^2 = \frac{\sum z_i^2}{n} - \bar{z}^2$$

$$\bar{z}^2 = 0'0025$$

$$S_z^2 = \frac{(-0'2)^2 + (-0'3)^2 + (0'1)^2 + (0'1)^2 + (-0'4)^2 + (-0'1)^2 + (0'3)^2 + (-0'2)^2 + (0'3)^2 + (-0'1)^2}{10} - (0'0025) =$$

$$= \frac{0'55}{10} - (0'0025) = 0'055 - 0'0025 = 0'0525$$

$$\hat{S}_z^2 = \frac{n \cdot S_z^2}{n-1} = \frac{10 \cdot 0'0525}{9} = 0'058\bar{3}$$

$$S_z = \sqrt{\hat{S}_z^2} = \sqrt{0'058\bar{3}} = 0'241522945$$

$$P(t_q < K) = 0'975$$

$$K = 2'262$$

$$\left(0'0025 - 2'262 \cdot \frac{0'241522}{\sqrt{10}}, 0'0025 + 2'262 \cdot \frac{0'241522}{\sqrt{10}} \right)$$

$$(0'0025 - 0'17276310, 0'0025 + 0'172763103)$$

$$(-0'170263, 0'175263103)$$