FACULTAD DE CIENCIAS EMPRESARIALES
DE OURENSE
ESTADÍSTICA
CURSO 2005_2006

UNIVERSIDADE DE VIGO

Boletín 5 . Inferencia Estadística: Distribución en el muestreo

1. (Junio, 2000) La duración de cierta marca de fusibles sigue una distribución normal de media 1000 horas y desviación típica 100 horas. Se desea enviar una muestra de fusibles de modo que la duración media muestral no difiera de la poblacional en más de 50 horas con una probabilidad de 0'95. Hallar el tamaño de la muestra que se debe enviar.

2. (Septiembre, 2000) La autoridad monetaria de un país decide llevar a cabo una investigación sobre los rendimientos que produce un determinado producto financiero ofertado por los bancos. Seleccionada una muestra aleatoria simple de 9 entidades bancarias y suponiendo que los rendimientos de este producto, en el conjunto bancario, se distribuyen normalmente con media 23 unidades monetarias (u.m.) y desviación típica de 6 u.m., calcular:
   a) Probabilidad de que el rendimiento medio muestral se mantenga entre 18,72 y 25,76 u.m.
   b) Probabilidad de que la varianza muestral sea superior a 60,12.
   c) Calcular un valor de k tal que $p(S^2 > k) = 0,95$.

3. (Septiembre, 1998) El tiempo que un empleado tarda en montar un componente electrónico es una v.a. normal de media 6 minutos y varianza 2 min^2. Suponiendo que los tiempos de montaje son v.a. independientes, si un empleado monta 30 componentes:
   a) Calcular la probabilidad de que la media muestral de los tiempos de montaje sea inferior a 5 minutos y medio.
   b) Calcular la probabilidad de que la varianza muestral sea inferior a 2,6 min^2
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sucedan los dos sucesos anteriores simultáneamente?

4. Se desea averiguar el peso medio de una partida de tomates, de los que sabemos que su peso es normal con desviación típica de 100 gramos. ¿De qué tamaño debe de ser una muestra aleatoria simple de dichos tomates para que el peso medio muestral no difiera, en valor absoluto, del real en más de 100 gramos con una probabilidad de 0'95? Con dicho tamaño muestra, ¿cuál es la probabilidad de que la varianza muestral sea superior a 15.625?

5. Sea X1, X2, X3, X4, X5 una muestra aleatoria de una población normal. Considerar como estimadores de la media poblacional:

$\hat{T}$(X1, X2, X3, X4, X5) = (X1+ X2+ X3 + X4+ X5)/5
$\hat{H}$(X1, X2, X3, X4, X5) = (X1+ 2X2+ X3 + X4+ X5)/6

Identificar el estimador de varianza más pequeña.

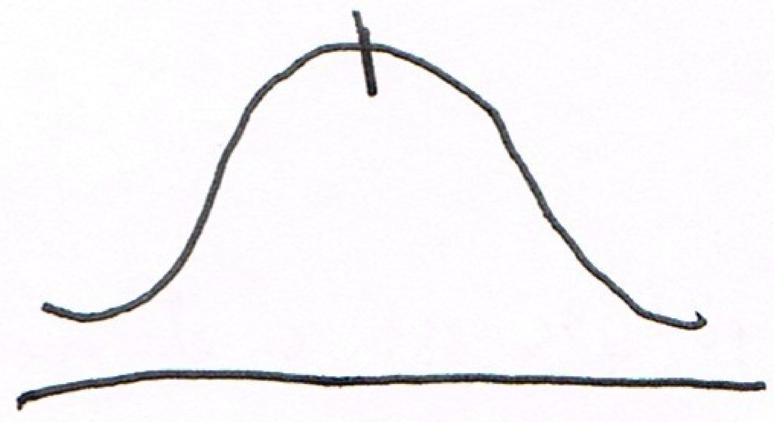
media = 1000h

$\sigma = 100$

duracion media muestral no difiera + de 50h

prob de 0'95

1000h



$N(\mu, \sigma) = N(1000, 100)$

usamos valor absoluto / no sabemos si $\bar{x} > \mu$ o viceversa

$P(|\bar{x} - \mu| \leq 50) = 0'95$ sacar valor absoluto

$P(-50 \leq \bar{x} - \mu \leq 50) = 0'95$

conocida $\boxed{\sigma^2}$

~~μ cona~~ necesitamos el estadístico pivotal para μ y conocemos $\rightarrow$

para	suposición	estadístico pivotal	distribución
μ	σ^2 conocida	$\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$	$N(0,1)$

$P(-50 \leq \bar{x} - \mu \leq 50) = 0'95$

¿Cual es mi estadístico pivotal?

$\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$

¿Que tengo?

$\bar{x} - \mu$

¿Que hago?

añado lo que me falta

$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x} - \mu)$

¡ojo! añado lo que me falta en los dos lados

P

$$P(-50 \le \boxed{\bar{x}-\mu} \le 50) = 0'95$$

⇓ inserto estadístico pivotal

$$P\left(-50\boxed{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}} \le \bar{x}-\mu\boxed{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}} \le 50\boxed{\frac{\sqrt{n}}{\sigma}}\right) = 0'95$$

⇓ ¿Que conozco?

$\sigma = 100$

$\sqrt{n} = ??$

$\cancel{\mu = 50n}$

$\bar{x}-\mu \rightarrow$ no lo se porque esta en el medio

⇓ substituyo

$$P\left(-50\frac{\sqrt{n}}{100} \le \bar{x}-\mu\frac{\sqrt{n}}{100} \le 50\frac{\sqrt{n}}{100}\right) = 0'95$$

⇓ Lo de enmedio es mi Z

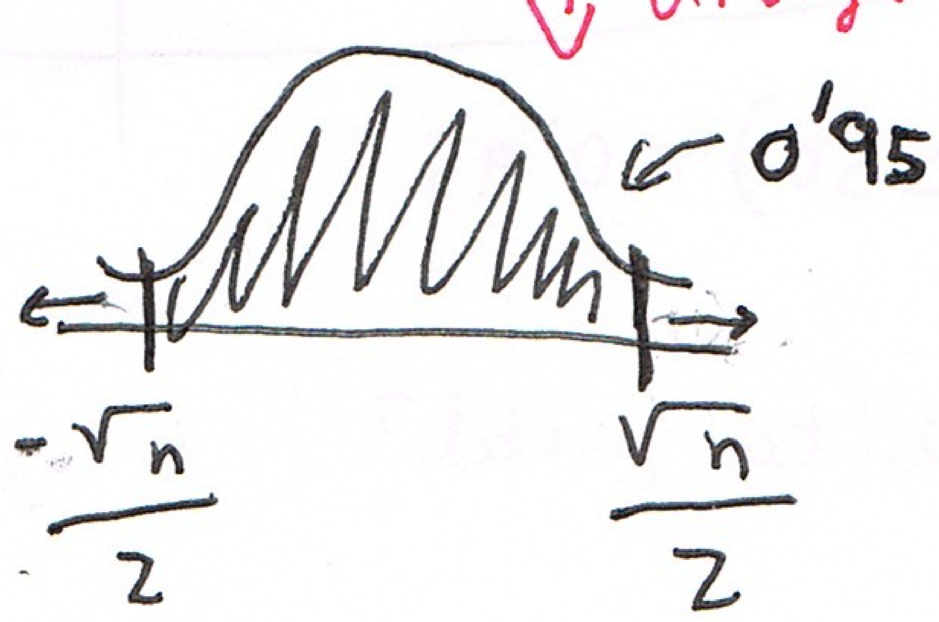
$$Z = \bar{x}-\mu\frac{\sqrt{n}}{100}$$

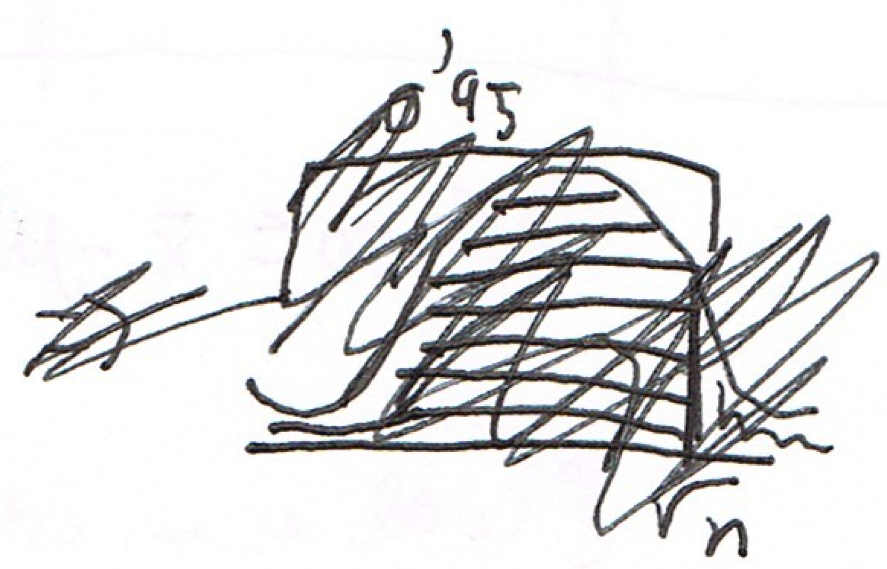
$$P\left(-50\frac{\sqrt{n}}{100} \le Z \le 50\frac{\sqrt{n}}{100}\right) = 0'95$$

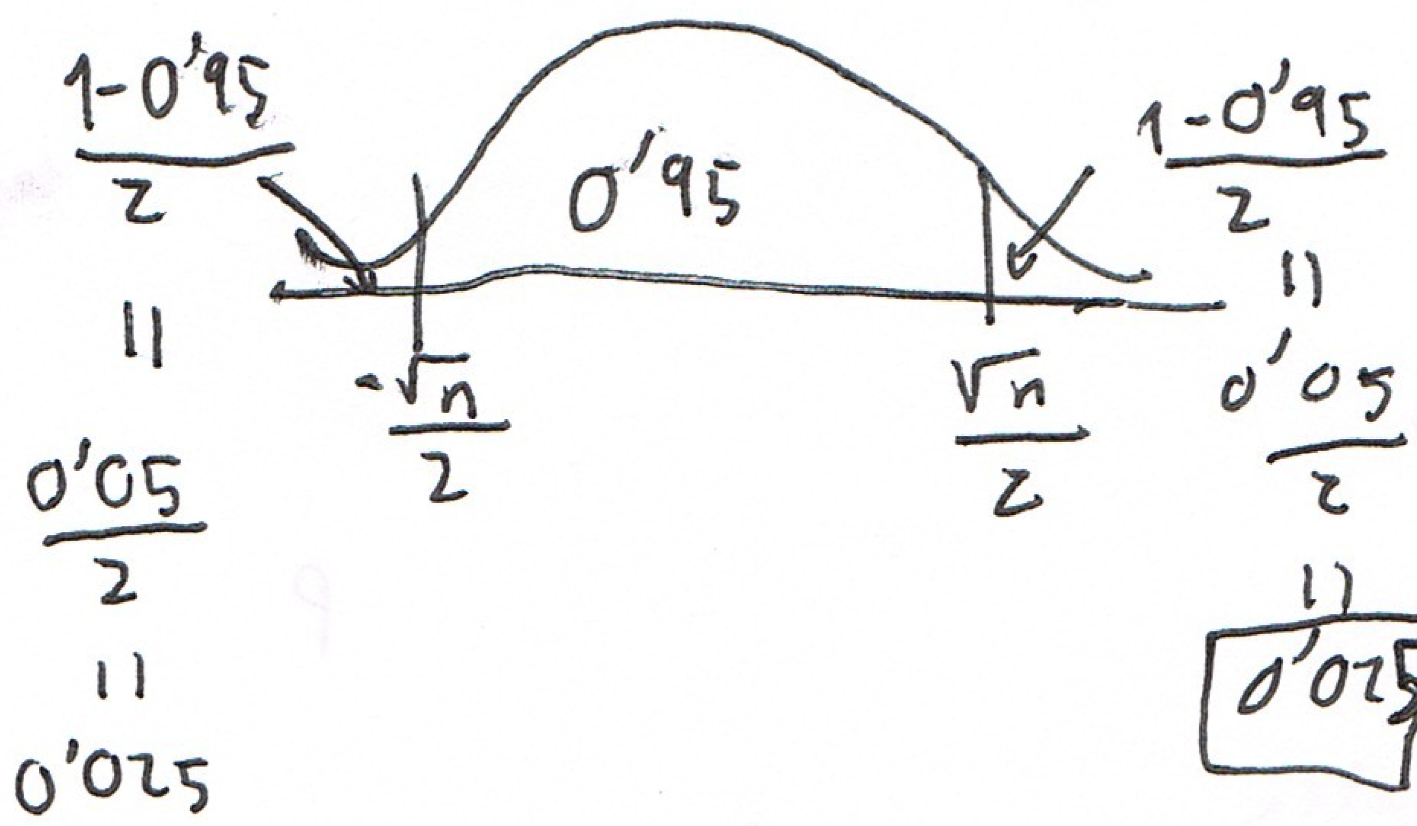
⇓ simplifico

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{2} \le Z \le \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 0'95$$

⇓ dibujo







$P\left(z \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = \boxed{0'025}$ esto que es?? una probabilidad

¿y donde buscamos la probabilidad? Dentro de la tabla

$\cancel{P(0'025) = 1'96}$

$P(???) = 0'025$

$P(1'96) = 0'025$

$\frac{\sqrt{n}}{2} = 1'96$

$\sqrt{n} = 2 \times 1'96$

$\sqrt{n} = 3'92$

$n = 15'36$

¿cuantos fusibles necesitamos? 16

¿Y porque 16 y no 15'36?

puedes conseguir 15 fusibles si

puedes conseguir 0'36 fusibles NO

entonces 15 no llega y como el 0'36 no lo consigo meto otro

~~La autoridad monetaria~~

~~Se se~~ $\boxed{\text{boletin 5 ejercicio 2}}$

9 entidades bancarias

media de 23 unidades monetarias

desviación típica 6 unidades monetarias

calcular

Probabilidad de que el rendimiento se mantenga entre

18'72 um y 25'76 um

$$N(23,6)$$

$$P(18'72 \leq \bar{x} \leq 25'76) = ?$$

$$\cancel{P(18'72 \leq Z \leq 25'76) = ?}$$

para	suposición	~~estadístico pivotal~~	distribución
μ	σ^2 conocida	$\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$	$N(0,1)$

que tengo? $\bar{x}$

que tiene mi estadístico? $\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$

que tengo que meter? $\sqrt{n}\,\frac{-\mu}{\sigma}$

~~Z=~~

$$\cancel{P\left(18'72\left(\sqrt{n}\,\frac{-\mu}{\sigma}\right) \leq Z \leq 25'76\left(\sqrt{n}\,\frac{-\mu}{\sigma}\right)\right)}$$

~~paso~~

Insertamos ~~la~~ el pivotal

primero las restas $-\mu$

$$P(18'72-\mu \le \bar{x}-\mu \le 25'76-\mu)$$

despues las divisiones $/\sigma$

$$P\left(\frac{18'72-\mu}{\sigma} \le \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \le \frac{25'76-\mu}{\sigma}\right)$$

despues las multiplicaciones

$$P\left(\sqrt{n}\,\frac{18'72-\mu}{\sigma} \le \sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \le \sqrt{n}\,\frac{25'76-\mu}{\sigma}\right)$$

substituimos

$$Z=\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \qquad \mu=23 \quad \sigma=6 \quad \sqrt{n}=\sqrt{9}$$

$$P\left(\sqrt{9}\,\frac{18'72-23}{6} \le \sqrt{9}\,\frac{\bar{x}-23}{6} \le \sqrt{9}\,\frac{25'76-23}{6}\right)$$

$$P\left(3\,\frac{18'72-23}{6} \le 3\,\frac{\bar{x}-23}{6} \le 3\,\frac{25'76-23}{6}\right)$$

$$P\left(3\,\frac{-4'28}{6} \le 3\,\frac{\bar{x}-23}{6} \le 3\,\frac{2'72}{6}\right)$$

$$P(3(-0'71\hat{3}) \le Z \le 3\cdot 0'45\hat{3})$$

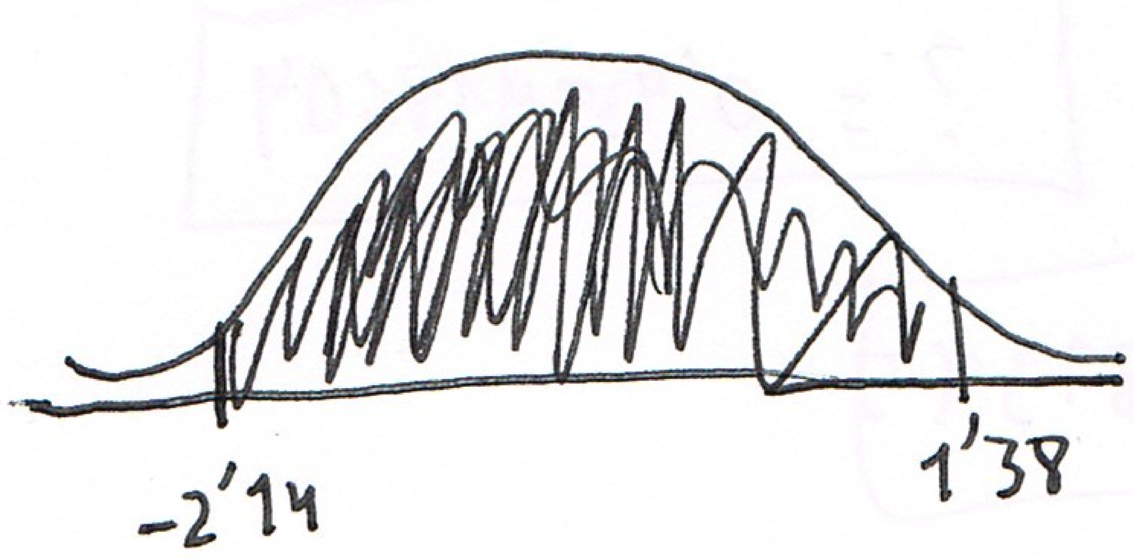
$$P(-2'13\hat{9} \le Z \le 1'38)$$

no esta en la tabla

$$Z = \boxed{P(Z \ge -2'14)} - P(Z \ge 1'38) =$$

$$= \boxed{1-P(Z\ge 2'14)} - 0'0838 =$$

$$= 1 - 0'0162 - 0'0838 = \boxed{0'9}$$



$z = 0'9$

b) ¿ calcular la probabilidad de que la varianza muestral sea ~~inferior a 2'6~~ superior a $60'12$?

$$P(S^2 > 60'12)$$

vamos a las tablas

para	suposición	estadístico Pivotal	Distribución
σ^2	μ desconocida	$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}$	χ^2_{n-1}

$$\hat{S}^2 = \frac{n \cdot s^2}{n-1}$$

$$P(S^2 > 60'12) = P\left(\frac{n \cdot S^2}{\sigma^2} > \frac{n \cdot 60'12}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi^2_{n-1} > \frac{n \cdot 60'12}{\sigma^2}\right) =$$

$$= P\left(\chi^2_{\boxed{8}} > \frac{9 \cdot 60'12}{6^2}\right) = P(\chi^2_8 > 15'055) = 1 - P(\chi^2_8 < 15'055) =$$

9 elementos

$(13'36, 0'9)$

$(15'51, 0'95)$

$(15'055, ?)$

$$\frac{? - 0'9}{0'95 - 0'9} = \frac{15'055 - 13'36}{15'51 - 13'36}$$

$$\frac{? - 0'9}{0'05} = \frac{1'695}{2'15}$$

$$(? - 0'9) * 2'15 = 1'695 \cdot 0'05$$

$$2'15? - 1'935 = 0'08475$$

$$2'15? = 2'01975$$

$$\boxed{? = 0'939418604}$$

$$\boxed{P = 1 - ? = 0'060581395}$$

2) c)

Calcular un valor k tal que $P(S^2 > k) = 0'95$

$$P(S^2 > k) = 0'95$$

$$P(S^2 < k) = 0'05$$

Parám	Suposición	Estadístico Pivotal	Distribución
σ^2	μ desconocida	$\frac{(n-1)\, S_x^2}{\sigma^2}$	χ^2_{n-1}

$$\frac{n \cdot S_x^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1}$$

$$P(S^2 < k) = 0'05$$

$$P(S_x^2\, n < k.n) < 0'05$$

$$P\left(\frac{S_x^2\, n}{\sigma^2} < \frac{k.n}{\sigma^2}\right) < 0'05$$

$$P\left(\frac{9n}{\sigma^2} < \frac{9k}{\sigma^2}\right) < 0'05$$

$$P\left(\frac{9n}{6^2} < \frac{9k}{6^2}\right) < 0'05$$

$$P\left(\chi^2_8 < \frac{9k}{36}\right) < 0'05$$

$$P\left(\chi^2_8 < \frac{3.3.k}{3.2.2.3}\right) < 0'05$$

$$P\left(\chi^2_8 < \boxed{\frac{k}{2.2}}\right) < 0'05$$

miramos en tabla ? $\chi^2_8 < 0'05$ $\rightarrow$ $2'73 = ? = \frac{k}{2.2} \Rightarrow k = 2.2.2'73 = 10'92$

3)

media = μ = 6 min

varianza = σ^2 = 2 min

para 30 componentes

a) ¿ Calcular la probabilidad de que la media muestral de los tiempos de montaje sea inferior a 5 minutos y medio

$\bar{x} < 5$ min

~~P(~~

$P(\bar{x} < 5.5)$

Para	Suposición	Estadístico Pivotal	Distribución
μ	σ^2 conocida	$\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}$	$N(0,1)$

$$P\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} < \sqrt{n}\,\frac{5'5-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{x}-6}{\sqrt{2}} < \sqrt{n}\,\frac{5'5-6}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P\left(\sqrt{30}\,\frac{\bar{x}-6}{\sqrt{2}} < \sqrt{30}\,\frac{5'5-6}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P\left(z < \sqrt{30}\,\frac{5'5-6}{\sqrt{2}}\right) = P\left(z < 5'47722\,\frac{-0'5}{1'414213}\right) = P\left(z < \frac{2'73861}{1'414213}\right) =$$

$$= P(z < 1'93649047) = 0'0262$$

5

3b) ¿Calcular la probabilidad de que la $\boxed{\text{varianza muestral}}$ sea inferior a 2'6 min^2?

$\downarrow$
S^2

~~P(X/S<2'6)~~

$P(S^2<2'6)=$

$$S_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2}\to\chi^2_{n-1}$$

$$P(S^2<2'6)=P\left(\frac{n.S^2}{\sigma^2}<\frac{n.2'6}{\sigma^2}\right)=P\left(\chi^2_{29}<\frac{30.2'6}{2}\right)=P(\chi^2_{29}<39)=0'9$$

3c) ¿Cual es la probabilidad de que sucedan los dos sucesos anteriores simultaneamente? (3b/c)

media muestral ($\bar{x}$) $<5'5$ && S^2 (varianza muestral) $<2'6$

$P(\bar{x}<5'5) * P(S^2<2'6)=$

$= 0'0262 * 0'9 = 0'02358$

$\boxed{P(A\cap B)=P(A)*P(B)}$

(4) $\bar{x}$ A? el peso es normal

~~$\sigma^2=100g$~~ $\sigma^2=100g$

tamaño = N= $\overbrace{\text{peso medio muestral}}^{\bar{x}}$ no difiera del real en más de 100 gramos con una probabilidad de 0'95?

$N(\mu,100)$

$P(|\bar{x}-\mu|\leq 100)\leq 100)=0'95$

$P(-100\leq\bar{x}-\mu\leq 100)=0'95$

Para	suposicion	Estadistico Pivotal	Distribución
μ	σ^2 conocida	$\sqrt{n}\cdot\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$	$N(0'1)$

$$P\left(-100 < \bar{X} - \mu \leq 100\right) = 0'95$$

~~$P(-100\sqrt{n}$~~

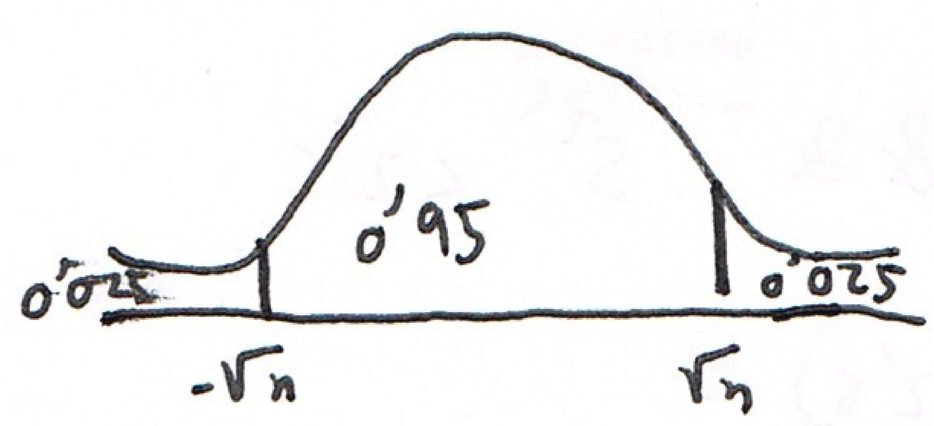
$$P\left(\sqrt{n}\,\frac{-100}{\sigma} < \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma^2} < \sqrt{n}\,\frac{100}{\sigma}\right) = 0'95$$

$$P\left(\frac{-100\sqrt{n}}{100} < Z < \frac{100\sqrt{n}}{100}\right) = 0'95$$

$$P\left(-\sqrt{n} < Z < \sqrt{n}\right) = 0'95$$

~~$P(Z > -\sqrt{n})$.~~

~~$P(Z > -\sqrt{n}) - P(Z < \sqrt{n}) = 0'95$~~



$$P\left(Z > \sqrt{n}\right) = 0'025$$

$$\sqrt{n} = 1'96$$

$$n = 1'96^2$$

$$\boxed{n = 3'8416}$$

b) Cual es la probabilidad de que la varianza muestral sea superior a 15'625?

$$P(S^2 > 15'625)$$

Para	Suposición	Estudistico Pivotal	Distribución
S^2	μ desconocida	$\frac{(n-1)\,S^2}{\sigma^2}$	χ^2_{n-1}

~~$P(\chi^2_3$~~

$P(S^2 > 15'625)$

$P\left(\frac{n \cdot S^2}{\sigma^2} > \frac{n \cdot 15'625}{\sigma^2}\right)$

$P\left(\chi^2_3 > \frac{4 * 15'625}{10000}\right) = P(\chi^2_3 > 6'25) = 1 - P(\chi^2_3 < 6'25)$

$1 - 0'9 = 0'1$

$P(S^2 > 15'625) = 0'1$

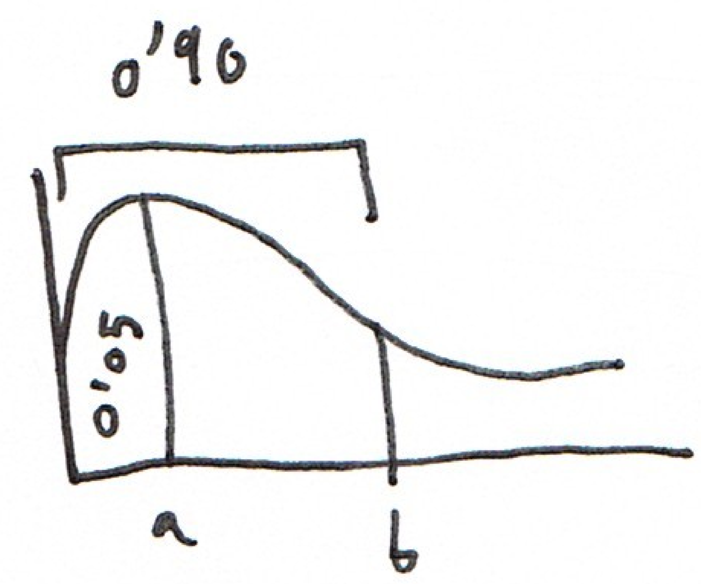
$\boxed{\text{Examen Febrero 09}}$

Si $X \sim \chi^2_{10}$ encontrar las constantes a y b tal que $P(a < X < b) = 0'9$ y $P(X < a) = 0'05$

~~$P(a<X<b)=0'9$~~

$P(X < a) = 0'05$

$P(X < 3'94) = 0'05$



$P(a < X < b) = 0'9 \qquad a < b$

~~$P(3'94 < X <$~~

~~$P(X > a)$ y $P(X < b)$~~

$P(X < b) - P(X < a) = 0'9$

$P(X < b) - 0'05 = 0'9$

$P(X < b) = 0'95$

$\boxed{b = 18'31}$

Examen Septiebre 08

Dada una m.a.s de tamaño 6 de una distribución $N(0,\sigma)$, calcular

a) $P\left(\frac{\bar{X}}{\hat{S}} > 2\right)$ con $\hat{S}$ la raiz de la cuasivarianza muestral

b) $P\left(\left|\frac{\bar{X}}{S}\right| < 4\right)$ con S la raiz de la varianza muestral